MATEMATIKA 8

UDŽBENIK ZA OSMI RAZRED OSNOVNOG OBRAZOVANJA

Dr. Kostadin Trenčevski
Dr. Biljana Krsteska
Vesna Bojadžieva

lamina

MATEMATIKA 8 udžbenik za osmi razred osnovnog obrazovanja
Autorska prava © 2026, Ars Lamina – publikacije

Izdavač
Ars Lamina – publikacije, Skoplje 2026

Glavna urednica
Branka Bugariska

Urednica
Biljana Stojoska Zlatkov

Autori
Dr. Kostadin Trenčevski
Dr. Biljana Krsteska
Vesna Bojadžieva

Prevod s makedonskog jezika
Vlasta Suša
Naziv originala: "Математика 8 учебник за осмо одделение во основно образование"

Jezička redakcija
Izeta Babačić

Recenzenti
Prof. dr. Ljupčo Nastovski
Prof. dr. Krutan Rasimi
Jovanka Vangelova

Dizajn
Pointer Creative Agency

Grafičko i tehničko uređenje
Ars Lamina – publikacije

Štampa
Ars Lamina, Skoplje 2026

Tiraž
35

Sva prava su zadržana. Nijedan dio ove knjige ne smije biti preštampavan niti prenošen u bilo kojem obliku ili bilo kojim sredstvima, elektronskim ili mehaničkim, uključujući fotokopiranje, dokumentovanje ili čuvanje u sistemu za ponovno pronalaženje podataka bez pisane saglasnosti izdavača.

Ovaj udžbenik je odobren za upotrebu u devetogodišnjem osnovnom obrazovanju, Odlukom o odobravanju i upotrebi udžbenika za nastavni predmet Matematika za VIII razred osnovnog obrazovanja broj 26-708/1 od 5.6.2026. godine, Ministarstvo obrazovanja i nauke Republike Sjeverne Makedonije.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=163.4(497.6)

ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Matematika 8 : udžbenik za osmi razred osnovnog obrazovanja / Kostadin Trenčevski, Biljana Krsteska, Vesna Bojadžieva ; [prevod s makedonskog jezika Vlasta Suša]. - Skoplje : Ars Lamina-publikacije, 2026. - 410 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Математика 8 учебник за осмо одделение во основно образование. - Библиографија: стр. 410

ISBN 978-608-280-324-1

1. Крстеска, Биљана [автор] 2. Бојацијева, Весна [автор]

COBISS.MK-ID 69370885

KAKO KORISTITI OVAJ UDŽBENIK?

Udžbenik je podijeljen na **pet tema** i svaka tema ima različitu boju:

TEMA 1: Brojevi i operacije s brojevima
TEMA 2: Geometrija
TEMA 3: Algebra
TEMA 4: Mjerenje
TEMA 5: Rad s podacima

Sadržaji u svakoj temi obrađeni su na lak i jednostavan način i u tu svrhu koriste se različita polja.

Aktivnost

Svaka lekcija počinje uvodnom aktivnošću u kojoj se nalaze pitanja ili zadaci kroz koje ćeš se prisjetiti šta si naučio/la prethodnih godina.

Primjer 1

Riješeni primjeri će ti pokazati kako koristiti pravila koja su data u lekciji.

Zadatak 1

Ovi zadaci slični su riješenim primjerima i trebalo bi da ih riješiš samostalno.

Ovo polje definiše pojmove koji se uče u lekciji i važno ih je naučiti kako bi mogao/la razumjeti zahtjeve u zadacima.

Ovo polje sadrži svojstva ili pravila koja su važna u lekciji, a koja treba da naučiš kako bi mogao/la riješiti zadatke.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

Na kraju svake lekcije nalaze se zadaci pomoću kojih ćeš moći ponoviti ono što je naučeno u toj lekciji.

Istraživanje

Ovo polje sadrži zadatke za proširivanje i produbljivanje znanja.

Na kraju svake teme nalaze se zadaci za ponavljanje i utvrđivanje gradiva iz teme.
Ovi zadaci će ti pomoći da ponoviš i produbiš znanje iz svake lekcije date teme.

Sadržaj

TEMA 1: BROJEVI I OPERACIJE S BROJEVIMA

1. POJAM RELACIJE 8
2. OSOBINE RELACIJA 13
3. RELACIJA EKVIVALENCIJE I RELACIJA PODREĐIVANJA 18
4. RELACIJE U PRAKSI 21
5. RACIONALNI BROJEVI 25
6. BESKONAČNI PERIODIČNI DECIMALNI BROJEVI 30
7. JEDNAKOST RAZLOMAKA, DECIMALNIH BROJEVA I PROCENATA 33
8. IZRAČUNAVANJE RAZLOMAKA I PROCENATA KOLIČINA 37
9. PRIMJENA PROCENATA 40
10. RAZMJERA 42
11. PROPORCIONALNE VELIČINE 47
12. SABIRANJE I ODUZIMANJE RACIONALNIH BROJEVA 54
13. MNOŽENJE I DIJELJENJE RACIONALNIH BROJEVA 59
14. OSOBINE OPERACIJA SA RACIONALNIM BROJEVIMA 64
15. BROJEVNI IZRAZI S RACIONALNIM BROJEVIMA 68
16. DVOJNI RAZLOMCI 70
17. STEPENI SA CJELOBROJNOM OSNOVOM I STEPENOVIM POKAZATELJEM - PRIRODNIM BROJEM 74
18. KVADRATNI KORIJEN I KUBNI KORIJEN 78
19. PISANJE BROJEVA U OBLIKU $a \cdot 10^k$, za a, $k \in \mathbb{N}$ 84
20. MNOŽENJE I DIJELJENJE STEPENA SA ISTIM OSNOVAMA 90

TEMA 2: GEOMETRIJA

1. UGLOVI SA MEĐUSOBNO PARALELNIM KRACIMA 100
2. KRUŽNICA, KRUG I NJIHOVI DIJELOVI 105
3. PERIFERNI UGAO 111
4. KONSTRUKCIJE NEKIH SPECIJALNIH VRSTA TROUGLOVA 117
5. POJAM PODUDARNOSTI. PODUDARNI TROUGLOVI 122
6. PRIZNACII PODUDARNOSTI TROUGLOVA 127
7. PITAGORINA TEOREMA 138

8. PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA TROUGLOVE 145
9. ČETVEROUGAO. PARALELOGRAM. PRAVOUGAONIK, ROMB I KVADRAT 149
10. TRAPEZ I DELTOID 156
11. PRIMJENA PITAGORINE TEOREME U ČETVEROUGLOVIMA 163
12. KONSTRUKTIVNI ZADACI 169
13. POLIEDAR, LOPTA I SFERA 175
14. PRAVILNI POLIEDRI 180
15. VEZA IZMEĐU BROJA TJEMENA, IVICA I STRANA POLIEDRA 183
16. CRTANJE SLOŽENIH 3D-OBLIKA 186
17. KOMBINACIJE TRANSLACIJA, ROTACIJA I OSNIH SIMETRIJA 189
18. IDENTIFIKOVANJE KOMBINACIJA OSNE SIMETRIJE, ROTACIJE I TRANSLACIJE 194

TEMA 3: ALGEBRA

1. Monom 202
2. SABIRANJE I ODUZIMANJE MONOMA 206
3. POLINOM. STEPEN POLINOMA 210
4. SABIRANJE I ODUZIMANJE POLINOMA 215
5. MNOŽENJE POLINOMA 219
6. DIJELJENJE POLINOMA MONOMOM 222
7. POJEDNOSTAVLJIVANJE CIJELIH RACIONALNIH IZRAZA 225
8. ZAMJENA PROMJENLJIVIH CIJELIM BROJEVIMA U CIJELIM RACIONALNIM IZRAZIMA I U FORMULAMA 228
9. SASTAVLJANJE I RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNAČINA 233
10. PRIMJENA LINEARNIH JEDNAČINA SA JEDNOM NEPOZNATOM 237
11. NIZOVI BROJEVA I OBLIKA 242
12. ODREĐIVANJE OPŠTEG ČLANA NIZA 245
13. FUNKCIJA 251
14. LINEARNA FUNKCIJA. GRAFIK LINEARNE FUNKCIJE 258
15. TOK LINEARNE FUNKCIJE 264
16. ZAPISIVANJE LINEARNE FUNKCIJE DATE GRAFIKOM 273

TEMA 4: MJERENJE

1. MJERNE JEDINICE ZA VRIJEME 286
2. GRAFICI U VREMENSKOM KONTEKSTU 289
3. DUŽINA KRUŽNICE 297
4. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК 301
5. PERIMETAR (OBIM) SLOŽENIH 2D OBLIKA 306
6. POVRŠINA PARALELOGRAMA 311
7. POVRŠINA TROUGLA 315
8. POVRŠINA TRAPEZA 320
9. POVRŠINA ROMBA, DELTOIDA I KVADRATA 324
10. POVRŠINA KRUGA 328
11. POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA, KRUŽNOG ODSJEČKA I KRUŽNOG PRSTENA 331
12. POVRŠINA PRIZME I PIRAMIDE 336
13. ZAPREMINA PRIZME I PIRAMIDE 342

TEMA 5: RAD S PODACIMA

1. POPULACIJA I UZORAK 353
2. DISKRETNI PODACI. TABELA FREKVENCIJA 359
3. PLANIRANJE ISTRAŽIVANJA I PRIKUPLJANJE PODATAKA 365
4. DIJAGRAMI 372
5. STABLO – LIST DIJAGRAM 378
6. STATISTIČKI PRORAČUNI ZA GRUPISANE PODATKE 383
7. ELEMENTARNI DOGAĐAJ. SUPROTAN DOGAĐAJ. VJEROVATNOĆA 388
8. DOGAĐAJI KOJI SE MEĐUSOBNO ISKLJUČUJU. ZAVISNI I NEZAVISNI DOGAĐAJI 395

Tema 1:

BROJEVI I OPERACIJE S BROJEVIMA

Rezultati ucenja:

Proučavajući ovu temu, osposobit ćeš se da:

- rješavaš probleme u svakodnevnom kontekstu koristeći relacije između skupova.
- primjenjuješ jednakost razlomaka, decimalnih brojeva i procenata pri upoređivanju različitih količina.
- rješavaš probleme u svakodnevnom kontekstu pomoću razmjere i proporcionalnosti.
- koristiš operacije s racionalnim brojevima u svakodnevnom kontekstu.
- u svakodnevnom kontekstu koristiš stepen s osnovom cijelog broja i pokazateljem- eksponentom stepena prirodnog broja, kvadratni i kubni korijen prirodnog broja.

1.POJAM RELACIJE

Aktivnost

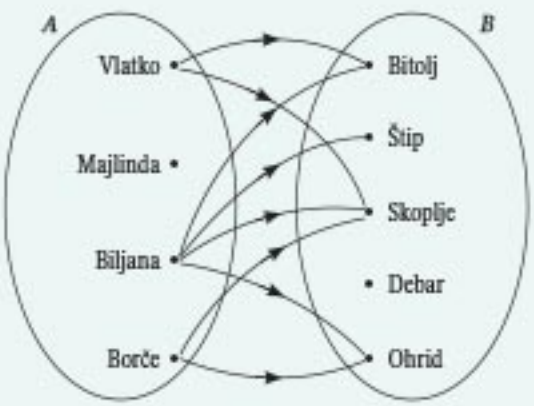
Dati su skupovi
$A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.
a) Navedi i zatim predstavi tabelarno i opisno skup $A \times B$ svih uređenih parova skupova A i B.
b) Zapiši tri proizvoljna podskupa M, N i P Dekartovog proizvoda $A \times B$.

Upoznat ćemo se s veoma važnim pojmom u matematici, pojmom relacije.
Ova riječ u svakodnevnom životu ima široko značenje, ali u matematici ima veoma precizan smisao i značenje.

Primjer 1

Crtež 1 prikazuje Venov dijagram skupa A od četiri učenika i skupa B od pet gradova:
$A = \{$Vlatko, Majlinda, Biljana, Borče$\}$ i
$B = \{$Bitolj, Štip, Skoplje, Debar, Ohrid$\}$.
Strelice pokazuju koje gradove u skupu B je posjetio svaki učenik iz skupa A.
Šta možeš zaključiti iz dijagrama?

Dvije strelice polaze od Vlatka, jedna prema Bitolju, a druga prema Skoplju.
One ukazuju da je Vlatko posjetio Bitolj i Skoplje. Kažemo da je Vlatko **u relaciji** s Bitoljem, a također i da je Vlatko **u relaciji** sa Skopljem.
Nijedna strelica ne počinje od Majlinde. To znači da Majlinda nije posjetila nijedan od navedenih gradova. Kažemo da Majlinda **nije u relaciji** ni s jednim od navedenih gradova.
Nijedna strelica ne dolazi do grada Debra. To znači da nijedan od učenika nije posjetio ovaj grad.
Kažemo da nijedan od učenika **nije u relaciji** s Debrom.

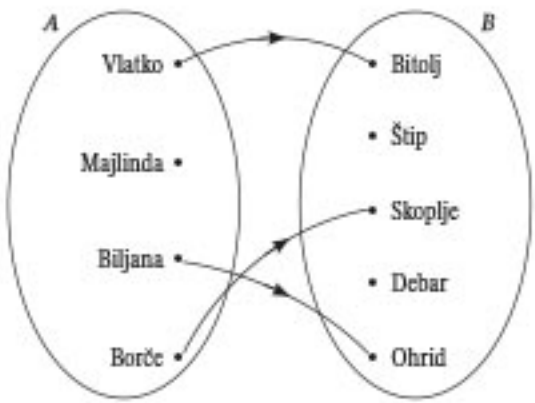


crtež 1

U ovom slučaju kažemo da je pomoću strelica data **relacija** prema pravilu pridruživanja „...posjetio grad...“ među elementima skupova A i B. Na crtežu 1, elementi skupova A i B predstavljeni su Venovim dijagramima, a elementi koji se nalaze u relaciji iz dva skupa povezani su strelicama. Za ovakav način predstavljanja kažemo da je predstavljanje grafom date relacije. Svaka strelica u grafu crteža 1 zamjenjuje jedan uređeni par objekata, od kojih je prvi element A i nalazi se na početku strelice, a drugi je element B i nalazi se na kraju strelice. Postoji onoliko uređenih parova koliko ima strelica.
Shodno tome, u primjeru 1 dobijamo uređene parove:
(Vlatko, Bitolj), (Vlatko, Skoplje), (Biljana, Bitolj), (Biljana, Štip),
(Biljana, Skoplje), (Biljana, Ohrid), (Borče, Skoplje), (Borče, Ohrid).
Svi uređeni parovi u relaciji od A do B formiraju precizno definisan skup, koji je podskup Dekartovog proizvoda skupova A i B.

Zadatak 1

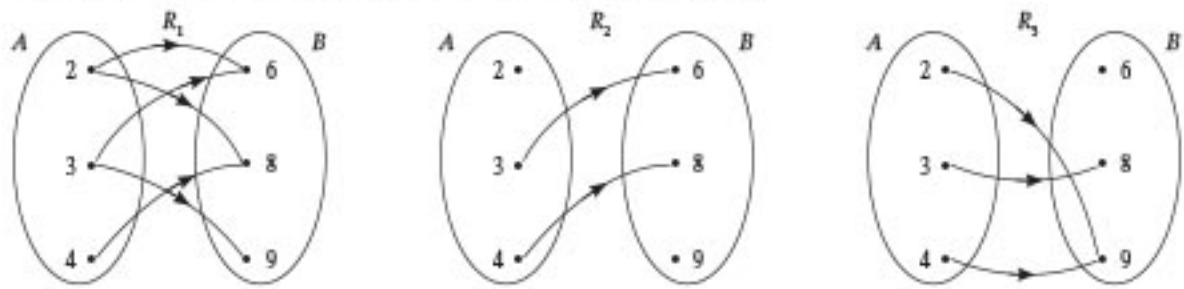
Na crtežu 2 prikazan je graf relacije određene pravilom pridruživanja „...je rođen/rođena u...“ između skupova A i B.
Da li učenik iz skupa A može biti u relaciji s više gradova iz skupa B? Objasni svoj odgovor.



crtež 2

Zadatak 2

Na crtežu 3 pomoću grafa između skupova A i B date su tri relacije, R_1, R_2 i R_3. Pravilo pridruživanja relacije R_1 određeno je sa: „...sadržan je u...“.
Pokušaj otkriti pravilo pridruživanja svake od relacija R_2 i R_3.



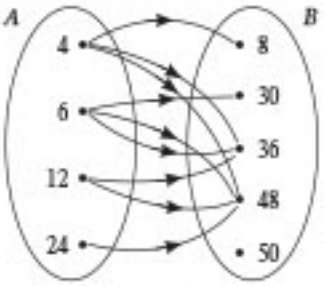
crtež 3

Neka su A i B dva neprazna skupa. Bilo koji podskup R Dekartovog proizvoda $A \times B$ naziva se **relacijom** između skupova A i B.

Ako je $(x, y) \in R$, kažemo da je x **u relaciji** s y i pišemo $x\,R\,y$.

Primjer 2

Dati su skupovi $A = \{4, 6, 12, 24\}$ i $B = \{8, 30, 36, 48, 50\}$.
Na crtežu 4 prikazan je graf relacije
R: „...je djelilac broja...“ između skupova A i B.
Predstavi relaciju R:
a) na opisni način, b) na tabelarni način.



crtež 4

Relacija R, posmatrana kao podskup Dekartovog proizvoda $A \times B$, može se predstaviti:
a) na **opisni način**, ističući vezu između elemenata koji su u relaciji
$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ i } x \mid y\}$;
b) na **tabelarni način**, zapisivanjem svih uređenih parova koji čine
$R = \{(4, 8), (4, 36), (4, 48), (6, 30), (6, 36), (6, 48), (12, 36), (12, 48), (24, 48)\}$.

Zadatak 3

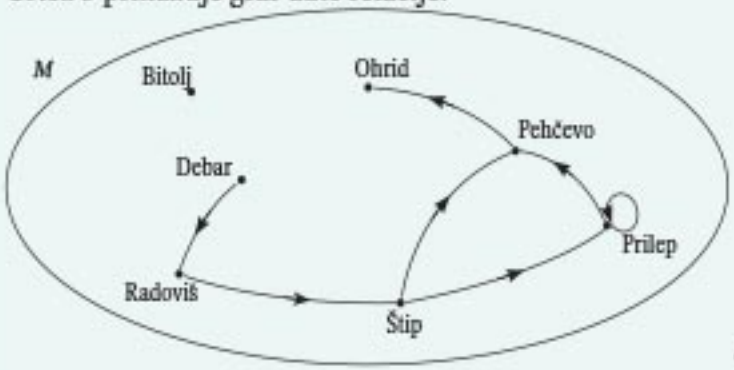
Dati su skupovi A = {4, 6, 17, 18} i B = {6, 19, 20, 24}.
Predstavi relaciju R: „...je za 2 manji od...“ iz skupa A u skup B.
a) grafom, b) opisno, c) tabelarno.

Relacije mogu biti zadane i između elemenata jednog istog skupa.

Primjer 3

Dat je skup $M = \{\text{Bitolj, Prilep, Štip, Ohrid, Debar, Radoviš, Pehčevo}\}$.
Nacrtaj graf relacije u skupu M:
„Posljednje slovo imena grada ... je prvo slovo imena grada ...“.

Crtež 5 prikazuje graf date relacije.



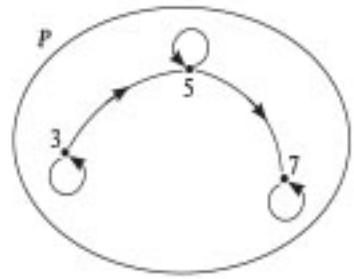
crtež 5

Zadatak 4

Predstavi relaciju R između elemenata skupa $P = \{3, 5, 7\}$ prikazanog grafom na crtežu 6:

a) na opisni način,

b) na tabelarni način.



crtež 6

Zadatak 5

U skupu $Q = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ data je relacija $R = \{(x, y) \mid x, y \in Q \text{ i } y = x + 2\}$. Predstavi relaciju R:

a) grafom, b) tabelarno.

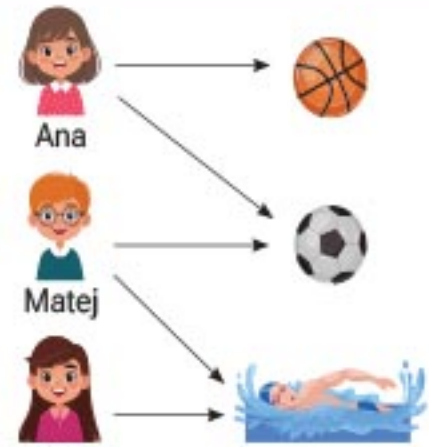
Zadatak 6

Na slici 1 prikazani su omiljeni sportovi Ane, Mateja i Liridone.
Oni biraju između sportova fudbala, košarke i plivanja.

a) Prikaži u tabelarnom obliku relaciju R: „...-ov omiljeni sport je...".

b) Da li dvoje djece ima isti omiljeni sport?

c) Da li neko dijete ima više od jednog omiljenog sporta?



slika 1

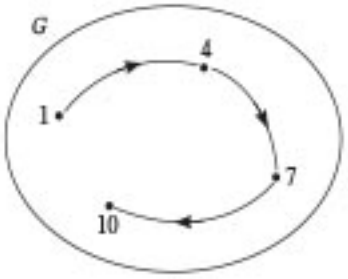
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Od ponuđenih okusa sladoleda: vanilija, čokolada i jagoda, Iva je izabrala okus vanilije, a Boris okus čokolade.
   a) Predstavi relaciju R grafom: „...izabrao/la je okus...".
   b) Da li su dva učenika izabrala isti okus sladoleda?
   c) Da li je neki učenik izabrao više od jednog okusa sladoleda?
   d) Da li postoji okus sladoleda koji nije izabran?

2. Nastavnica je pitala učenike Petra, Eminu i Mariju koje sportove treniraju. Dobila je odgovor da:
   Petar trenira fudbal, Emina trenira gimnastiku, Marija trenira plivanje, a Petar trenira košarku.
   a) Predstavi relaciju R grafom: „...trenira...".
   b) Da li neki učenik trenira više od jednog sporta?
   c) Da li neko od učenika ne trenira nijedan sport?

3. Prikaži relaciju R između elemenata skupova C i D grafom, ako je:
   a) $C = \{6, 9, 18, 29, 36\}$, $D = \{12, 15, 24, 27, 35, 42\}$ i R: "...je za 6 veće od...",
   b) $C = \{30, 24, 27, 18, 9, 12\}$, $D = \{8, 10, 3, 6, 9, 5\}$ i R: "...je 3 puta manje od...".

4. Predstavi relaciju R između elemenata skupa $G = \{1, 4, 7, 10\}$ prikazanih grafom na crtežu 7:
   a) na opisni način, b) na tabelarni način.



crtež 7

5. U skupu $P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ data je relacija $R = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ i } y = 2x\}$.
   Predstavi relaciju R: a) grafom, b) na tabelarni način.

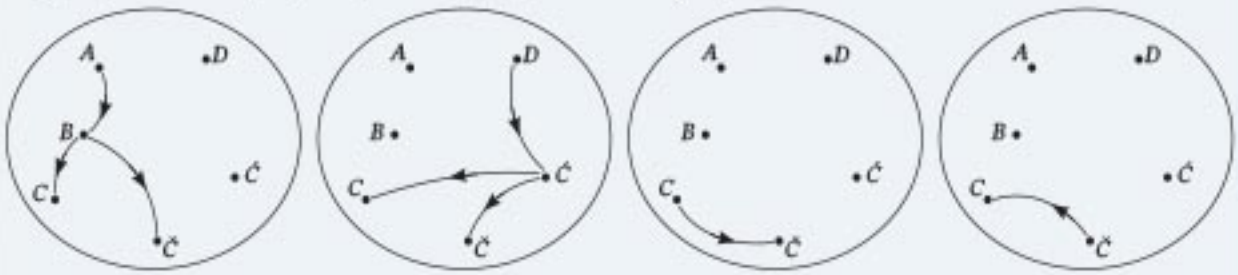
6. Ana je vježbala svakog radnog dana prošle sedmice kako bi se pripremila za sportsko takmičenje. Bilježila je koliko minuta je vježbala i koliko kalorija troši svakog dana. Podaci o njenom sedmičnom vježbanju prikazani su u tabeli:

dan u sedmici	vrijeme vježbanja (min)	kalorije
ponedjeljak	20	100
utorak	30	150
srijeda	25	125
četvrtak	40	200
petak	35	175

   Objasni relaciju između vremena vježbanja i potrošenih kalorija.
   Predstavi određenu relaciju: a) grafom b) na tabelarni način.

Istraživanje

U skupu C = {A, B, C, Č, Ć, D} članova porodice date su sljedeće relacije:
R_1 „...je otac...“, R_2 „...je majka...“, R_3 „...je brat...“ i R_4 „...je sestra...“.



Relacija R_1 Relacija R_2 Relacija R_3 Relacija R_4

crtež 8

Koristeći njihove grafikone, prikazane na crtežu 8, otkrij sastav i rodbinske odnose među članovima porodice.

2. OSOBINE RELACIJA

Kroz primjere iz matematike, ali i iz svakodnevnog života, otkrit ćeš zašto su svojstva relacija važna i kako će ti pomoći da opišeš odnose između elemenata u jednom skupu na precizan i logičan način.

Za relaciju R u skupu A kažemo da je **refleksivna** ako i samo ako $(x, x) \in R$, za svako $x \in A$, odnosno

$x \, R \, x$, za svako $x \in A$.

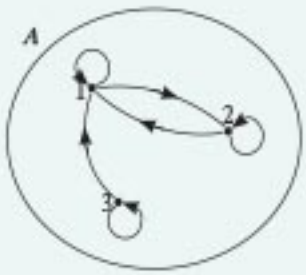
Primjer 1

U skupu $A = \{1, 2, 3\}$ data je relacija
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$.
Provjeri da li je relacija R refleksivna.

Relacija je refleksivna, jer uređeni parovi $(1, 1)$, $(2, 2)$ i $(3, 3)$ pripadaju R, odnosno
$1 \, R \, 1$, $2 \, R \, 2$ i $3 \, R \, 3$ što znači da je uslov

$x \, R \, x$ ispunjen, za svako $x \in A$.

Do istog zaključka možemo doći ako pogledamo graf relacije prikazan na crtežu 1. Od svakog elementa x, i polazi strelica koja se završava u samom tom elementu i naziva se **petlja**.



crtež 1

Kažemo da je relacija R u skupu A **simetrična** ako i samo ako $(x, y) \in R$ povlači $(y, x) \in$ R, za svako $x, y \in$ A, odnosno,

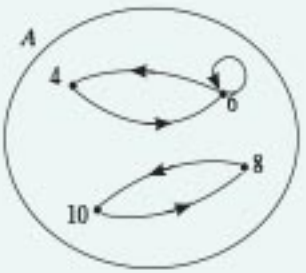
$x \, R \, y$, povlači $y \, R \, x$, za svako $x, y \in A$.

Primjer 2

U skupu $A = \{4, 6, 8, 10\}$ data je relacija
$R = \{(4, 6), (6, 6), (6, 4), (8, 10), (10, 8)\}$.
Provjeri da li je relacija R simetrična.

Za par $(6, 6)$ od R i par $(6, 6)$ pripada R,
za par $(4, 6)$ od R i par $(6, 4)$ pripada R,
za par $(6, 4)$ od R i par $(4, 6)$ pripada R,
za par $(8, 10)$ od R i par $(10, 8)$ pripada R,
što znači da je uslov $x \, R \, y$ zadovoljen, povlači $y \, R \, x$, za sve $x, y \in A$.

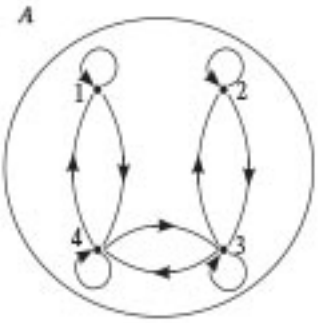
Prema tome relacija R je simetrična.
Do istog zaključka možemo doći ako razgledamo grafik relacije R prikazane na crtežu 2.
Primjećujemo da ukoliko postoji strelica od elementa x do elementa y, tada postoji i strelica od elementa y do elementa x, odnosno graf relacije R ima samo **dvostruke veze**. U ovom slučaju, petlju smatramo dvostrukom vezom.



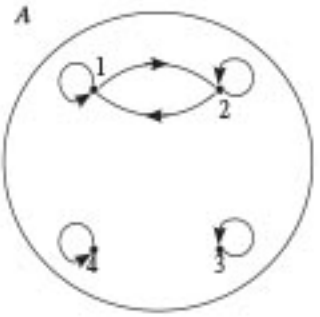
crtež 2

Zadatak 1

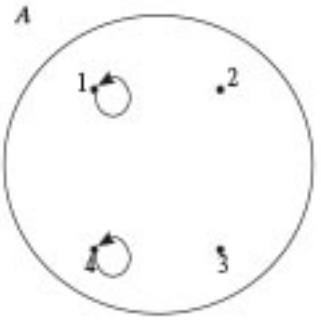
Relacije R_1, R_2 i R_3 u skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ predstavljene su svojim grafovima na crtežu 3. Koje od njih su refleksivne, a koje simetrične? Objasni svoj odgovor.



Relacija R_1



Relacija R_2



Relacija R_3

crtež 3

Zadatak 2

Marko, Sonja i Erol žive u istoj zgradi. Marko živi na četvrtom spratu, Sonja živi na petom spratu, a Erol živi na četvrtom spratu. Među učenicima, prema spratu na kojem žive, određena je relacija R: „...živi na istom spratu kao i...“
a) Predstavi relaciju tabelarno i pomoću grafa.
b) Da li je relacija R refleksivna i simetrična? Objasni svoj odgovor.

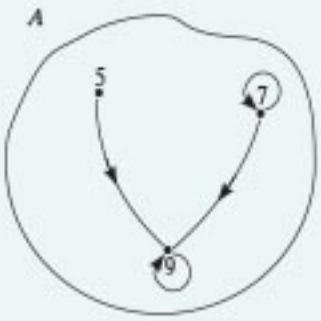
Kažemo da je relacija R u skupu A **antisimetrična** ako i samo ako $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$, implicira $x = y$, za svako $x, y \in A$, odnosno,

$x\,R\,y$ i $y\,R\,x$ povlači da je $x = y$, za svako $x, y \in A$.

Primjer 3

U skupu $A = \{5, 7, 9\}$ data je relacija $R = \{(5, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\}$.
Provjeriti da li je relacija R antisimetrična.

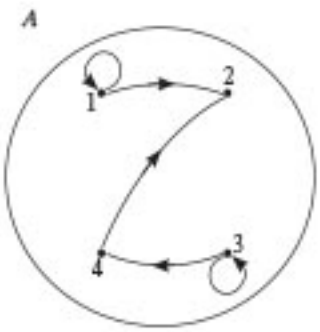
Za par (5, 9) elementa R, par (9, 5) ne pripada R,
a za par (7, 9) elementa R, par (9, 7) ne pripada R.
Prema tome, ako je $x\,R\,y$ i $y\,R\,x$ tada je $x = y$,
za svako $x, y \in A$, to znači da je relacija antisimetrična.
Do istog zaključka možemo doći ako posmatramo
graf relacije R prikazan na crtežu 4.
Primjećujemo da ako postoji strelica od elementa x
do elementa y, $x \neq y$, tada ne postoji strelica
od elementa y do elementa x, odnosno graf relacije R
nema nijednu dvostruku vezu osim možda petlje.



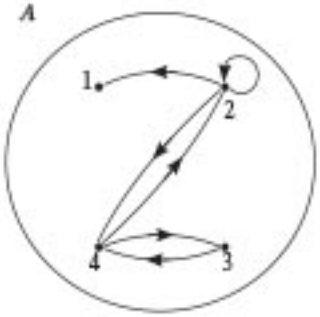
crtež 4

Zadatak 3

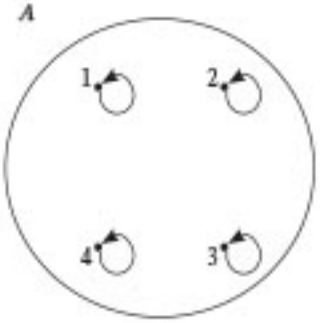
Relacije R_1, R_2 i R_3 u skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ predstavljene su svojim grafovima na crtežu 5. Koje od relacija su refleksivne, a koje antisimetrične? Objasni odgovor.



Relacija R_1



Relacija R_2



Relacija R_3

crtež 5

Zadatak 4

Filip, Ivan i Lidija idu u istu školu. Poznato je da Filip ima 14 godina,
Ivan ima 12 godina, a Lidija ima 7 godina. Među učenicima, prema njihovoj dobi,
relacija R određena je: „...je stariji od...".
a) Predstavi relaciju u tabelarnom obliku i grafom.
b) Da li je relacija R antisimetrična? Objasni svoj odgovor.

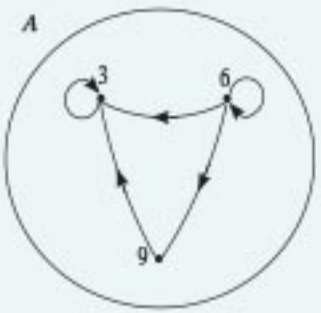
Za relaciju R u skupu A kažemo da je **tranzitivna** ako i samo ako $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$ povlači $(x, z) \in R$, za svako $x, y, z \in A$, odnosno

$x\,R\,y$ i $y\,R\,z$ i $x\,R\,z$, za svako $x, y, z \in A$.

Primjer 4

U skupu $A = \{3, 6, 9\}$ data je relacija $R = \{(3, 3), (6, 6), (6, 3), (6, 9), (9, 3)\}$.
Provjeri da li je relacija tranzitivna.

Provjerimo sve moguće slučajeve:



za parove (3, 3) i (3, 3) od R i par (3, 3) pripada R;
za parove (6, 6) i (6, 6) od R i par (6, 6) pripada R;
za parove (6, 6) i (6, 3) od R i par (6, 3) pripada R;
za parove (6, 6) i (6, 9) od R i par (6, 9) pripada R;
za parove (6, 3) i (3, 3) od R i par (6, 3) pripada R;
za parove (6, 9) i (9, 3) od R i par (6, 3) pripada R;
za parove (9, 3) i (3, 3) od R i par (9, 3) pripada R;

Vidimo da je uslov $x\,R\,y$ i $y\,R\,z$ zadovoljen, tada
$x\,R\,z$, za svako $x, y, z \in A$.

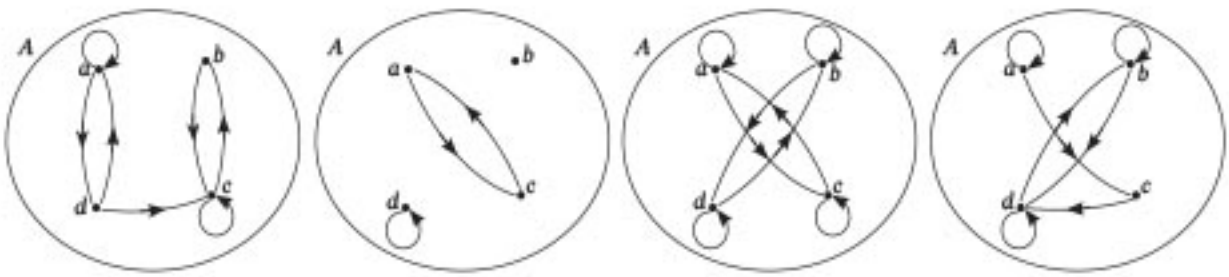
Do istog zaključka dolazimo ako razmotrimo graf relacije R prikazan na crtežu 6. Uočavamo da ukoliko postoji strelica od elementa x do elementa y i od elementa y do elementa z, onda postoji strelica od elementa x do elementa z (u provjeru uključujemo i petlje).

Zadatak 5

U školskom dvorištu, učenici Ana, Besid, Vera i Goran se postrojavaju za sportski trening. Nastavnik želi poredati učenike po visini. Ana je visoka 150 cm, Besid je visok 155 cm, Vera je visoka 150 cm, a Goran je visok 160 cm.
Nastavnik koristi relaciju R: „...je viši ili iste visine kao...“
a) Predstavi relaciju tabelarno i grafom.
b) Utvrdi da li je relacija refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

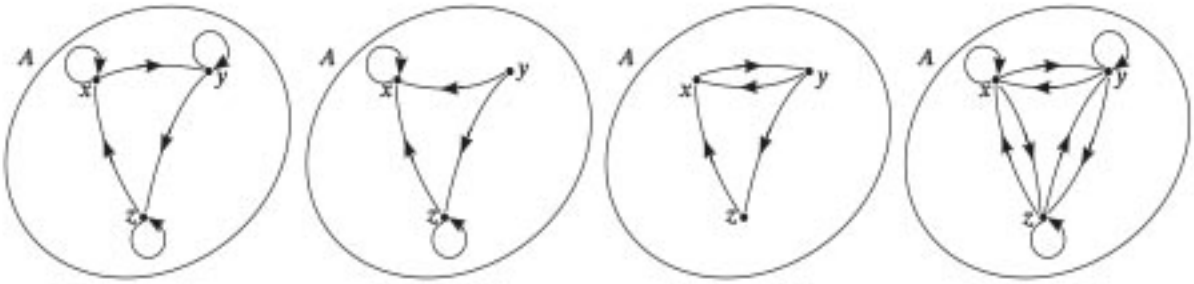
1. Koje od relacija R_1, R_2, R_3 i R_4 u skupu $A = \{a, b, c, d\}$ na slici 7 su:
   a) refleksivne, b) simetrične?



Relacija R_1 Relacija R_2 Relacija R_3 Relacija R_4

crtež 7

2. Koje od relacija R_1, R_2, R_3 i R_4 u skupu $A = \{x, y, z\}$ na slici 8 su:
   a) antisimetrične, b) tranzitivne?



Relacija R_1 Relacija R_2 Relacija R_3 Relacija R_4

crtež 8

3. U skupu $A = \{a, b, c, d\}$, date su relacije R_1, R_2, R_3 i R_4 tako da je: $R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, c)\}$, $R_2 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (d, c)\}$, $R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, b)\}$ i $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, b), (d, d)\}$.
   Koje od datih relacija su tranzitivne?

4. U skupu $T = \{1, 2, 3, 5\}$, date su relacije: R_1: „... je manje od ...“, R_2: „... nije manje od ...“, $R_3 = \{(x, y) \mid x, y \in T, x + y$ je paran broj$\}$ i $R_4 = \{(3, 2), (1, 1), (2, 3), (5, 5), (1, 5), (5,1)\}$.
   Predstavi svaku relaciju grafom i ispitaj njena svojstva: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost.

5. Dejan ima 19 godina, Simona ima 16 godina, a Goran ima 18 godina.
   U skupu $A = \{$Dejan, Simona, Goran$\}$ data je relacija R: „...je mlađi od...“.
   a) Predstavi relaciju R grafom.
   b) Da li je relacija tranzitivna? Objasni svoj odgovor.

6. Učenici Elena, Igor, Marko i Ilir izveli su po jednu muzičku kompoziciju. Profesor želi uspostaviti relaciju između učenika prema tempu (otkucajima-udarima u minuti) izvedene kompozicije. Tempo Elenine kompozicije bio je 60 otkucaja u minuti, Igorov je bio 100 otkucaja u minuti, Markov 60 otkucaja u minuti, a Ilirov 120 otkucaja u minuti.
   a) Predstavi grafom relaciju R: „...izvodi kompoziciju istim ili sporijim tempom od tempa kompozicije...“.
   b) Ispitaj svojstva relacije: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost.

7. U skupu $D = \{$Njemačka, Francuska, Španija, Italija, Belgija, Švicarska$\}$, relacija R definisana je: „...ima zajedničku kopnenu granicu sa...“.
   a) Grafom predstavi relaciju R.
   b) Da li je relacija refleksivna, simetrična ili tranzitivna? Objasni svoj odgovor.

   Uputstvo: Koristi geografsku kartu ili internet da bi utvrdio/la koje zemlje imaju zajedničke kopnene granice.

Istraživanje

Zapiši tabelarno skup članova svoje porodice. Zatim, tabelarno zapiši i relacije:
R_1: „...je stariji od...“ i R_2 „...nije mlađi od...“.
a) Ispitaj svojstva relacije R_1 i R_2.
b) Otkrij po kojem svojstvu se relacije R_1 i R_2 razlikuju?

3. RELACIJA EKVIVALENCIJE I RELACIJA PODREĐIVANJA

Aktivnost

U skupu $I = \{35, 25, 38, 75, 573, 735, 921\}$ data je relacija
R: „...ima istu cifru desetica kao...“.
a) Predstavi relaciju grafom. b) Ispitaj svojstva relacije.

Za relaciju R u skupu A kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Relacija ekvivalencije povezuje elemente koji se smatraju jednakim prema nekom svojstvu.

Primjer 1

Nastavnik maternjeg jezika daje učenicima zadatak da grupišu različite riječi s istim značenjem, tj. sinonime. Na primjer, riječi „sretan“, „radostan“ i „veseo“ su sinonimi. Da li se na ovaj način određuje relacija ekvivalencije u skupu riječi maternjeg jezika?

Da, zato što je ova relacija:
- refleksivna, jer je svaka riječ sinonim za sebe;
- simetrična, jer, na primjer, ako je „sretan“ sinonim za „radostan“, onda je „radostan“ sinonim za „sretan“;

- tranzitivna, jer, na primjer, ako je „sretan“ sinonim za „radosno“, onda je „radosno“ sinonim za „veselo“, onda je „sretan“ također sinonim za „radosno“.

Dakle, sinonimi određuju odnos i ekvivalenciju prema svom značenju.

Zadatak 1

U skupu S od svih automobila na parkingu, razmatramo relaciju, R: „...ima istu boju kao...“. Provjeri da li je R relacija ekvivalencije u skupu S.

Aktivnost

U skupu $I = \{1, 2, 3, 5\}$ data je relacija R: „...nije manja od...“.
a) Predstavi relaciju grafom.
b) Ispitaj svojstva relacije.

Kažemo da je relacija R u skupu A **relacija podređivanja** ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

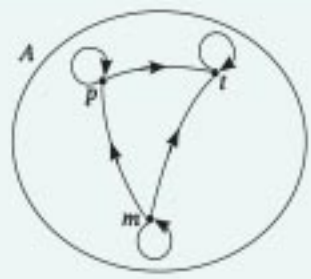
Relacija podređivanja uspostavlja redoslijed među elementima skupa prema određenom svojstvu (veličina, visina, broj elemenata itd.).

Primjer 2

U skupu $A = \{p, m, t\}$, data je relacija R: „...nije u engleskom alfabetu poslije...“.
a) Predstavi relaciju R grafom.
b) Provjeri da li je R relacija ekvivalencije ili relacija podređivanja.

a) Graf relacije R prikazan je na crtežu 1.
b) Relacija R ima sljedeća svojstva.

- refleksivna: p nije u engleskom alfabetu poslije p, što znači $(p, p) \in R$;
  m nije u engleskom alfabetu poslije m, što znači $(m, m) \in R$; i t nije u engleskom alfabetu poslije t, što znači $(t, t) \in R$.



crtež 1

- antisimetrična: m nije u engleskom alfabetu poslije p, pa nije tačno da p nije u engleskom alfabetu poslije m, što znači $(m, p) \in R$, već $(p, m) \notin R$;

p nije u engleskom alfabetu poslije t, tako da nije tačno da t nije u engleskom alfabetu poslije p, što znači $(p, t) \in R$, već $(t, p) \notin R$; i

m nije u engleskom alfabetu poslije t, tako da nije tačno da t nije u engleskom alfabetu poslije m, što znači $(m, t) \in R$, već $(t, m) \notin R$.

- tranzitivna: m nije u engleskom alfabetu poslije p, a p nije u engleskom alfabetu poslije t, ali m nije u engleskom alfabetu poslije t, što znači $(m, p) \in R$ i $(p, t) \in R$ povlači da $(m, t) \in R$.

Primjer 3

Sistematskim pregledom utvrđeno je da je Petar visok 160 cm, Nina je visoka 170 cm, a Izet je visok 180 cm. U skupu učenika data je relacija R: „...ima istu ili manju visinu od...“. Da li se tako određuje relacija za uređivanje skupa učenika?

Učenici Petar, Nina i Izet imaju različite visine. Relacija R je refleksivna, jer svaki učenik ima istu visinu kao i njegova sopstvena visina. Relacija R je antisimetrična, jer: Petar je iste ili manje visine od Nine, ali Nina nije iste ili manje visine od Petra; Petar je iste ili manje visine od Izeta, ali Izet nije iste ili manje visine od Petra; Nina je iste ili niža od Izeta, ali Izet nije iste ili manje visine od Nine.
Relacija R je tranzitivna, jer ako je jedan učenik iste ili manje visine od drugog učenika, a drugi je iste ili manje visine od trećeg učenika, onda je i prvi učenik iste ili manje visine od trećeg učenika.
Dakle, R je relacija podređivanja.

Napomena: Ako u datom skupu učenika dva učenika imaju istu visinu, onda relacija definisana na ovaj način neće biti antisimetrična. Zašto?

Zadatak 2

U skupu $A = \{3, 5, 7\}$ date su relacije: $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ i } x = y\}$ i $R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ i } x \leq y\}$.
Predstavi relacije: a) u tabelarnom obliku, b) pomoću grafa.
Da li je neka od relacija relacija ekvivalencije ili relacija podređivanja?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. U skupu B = {22, 28, 35, 43, 82} data je relacija R: „...ima istu cifru jedinica kao...“.
   a) Predstavi relaciju pomoću grafa.
   b) Provjeri da li je R relacija ekvivalencije ili relacija podređivanja.

2. U skupu $K = \{a, b\}$ data je relacija $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.
   Da li je R relacija ekvivalencije ili relacija podređivanja?

3. U skupu $M = \{3, 5, 7, 9\}$, data je relacija R: „...je veće ili jednako sa...".
   a) Predstavi relaciju R pomoću grafa.
   b) Provjeri da li je R relacija ekvivalencije ili relacija podređivanja.

4. U skupu numeričkih izraza $C = \{18 - 2 \cdot 3, 30 - 3 \cdot 4, 4 \cdot 5 - 8, 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4, (5 - 2) \cdot 4\}$ data je relacija R: „...ima istu vrijednost kao...".
   a) Predstavi relaciju R pomoću grafa.
   b) Provjeri da li je R relacija ekvivalencije ili relacija podređivanja.

5. Da li su relacije: R_1: „...nije viši od...", R_2: „...nije stariji od..." i R_3: „...nije teži od...", definisane u skupu učenika u školi, relacije podređivanja? Objasni svoj odgovor.

6. Na časovima historije, učenici su dobili podatke da se: osvajanje Carigrada od strane Osmanlija dogodilo 1453. godine, otkriće Amerike od strane Kolumba dogodilo 1492. godine, Francuska revolucija dogodila 1789. godine i da se potpisivanje Univerzalne deklaracije o ljudskim pravima dogodilo 1948. godine.
   a) Uspostavi relaciju R između ovih događaja, prema vremenu kada su se dogodili?
   b) Da li je R relacija podređenja?

Istraživanje

Pomoću informacija s interneta, pronađi podatke o vremenu razlaganja otpada u prirodi i to: papira, plastičnih kesa, aluminijskih konzervi i kore od jabuke. Rangiraj otpad prema vremenu razlaganja.
Da li može da se uspostavi veza za podređivanje otpada? Objasni svoj odgovor.

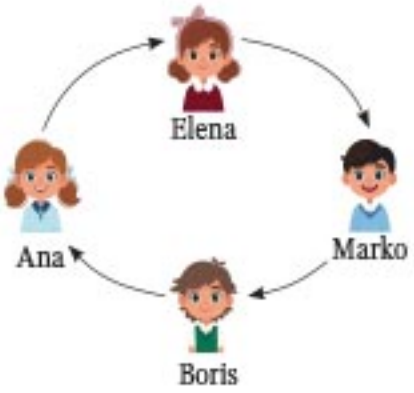
4. RELACIJE U PRAKSI

Aktivnost

Učenici Ana, Boris, Dragan i Emina igraju fudbal, košarku ili odbojku. Poznato je da Ana i Dragan igraju odbojku, Boris igra fudbal i košarku, a Emina igra košarku.
a) Predstavi relaciju R: „...igra isti sport kao..." pred učenicima tabelarno, opisno i pomoću grafa.
b) Da li je R relacija ekvivalencije? Zašto?

Primjer 1

BU biblioteci učenici razmjenjuju knjige za čitanje kao na crtežu 1.

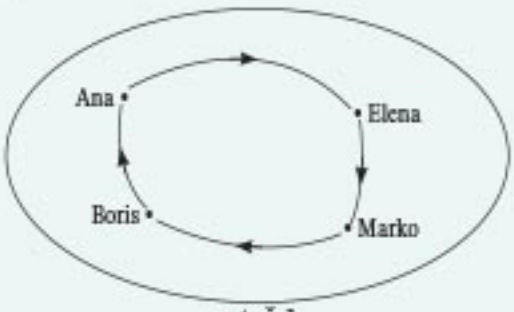


a) Predstavi relaciju
R_1: „...posudio/la je knjigu od...“ među učenicima iz razreda grafom.

b) Provjeri da li je relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

c) Predstavi relaciju
R_2: „...može dobiti knjigu nizom posuđivanja od...“ među učenicima pomoću grafa (na primjer, ako je Ana posudila knjigu od Elene, a Elena posudila knjigu od Marka, onda Marko može dobiti knjigu od Ane nizom posuđivanja Ana → Elena → Marko).
Da li je R_2 relacija ekvivalencije?

a) R1 = {(Ana, Elena), (Elena, Marko), (Marko, Boris), (Boris, Ana)}.
Predstavljanje relacije R_1 dato je na crtežu 1.



crtež 1

b) Relacija R_1:
- nije refleksivna jer, na primjer, Ana ne može posuditi knjigu sebi,
- nije simetrična jer, na primjer, Ana je posudila knjigu Eleni, ali Elena nije posudila knjigu Ani,
- nije tranzitivna jer, na primjer, Ana je posudila knjigu Eleni, Elena je posudila knjigu Marku, ali Ana nije posudila knjigu Marku.

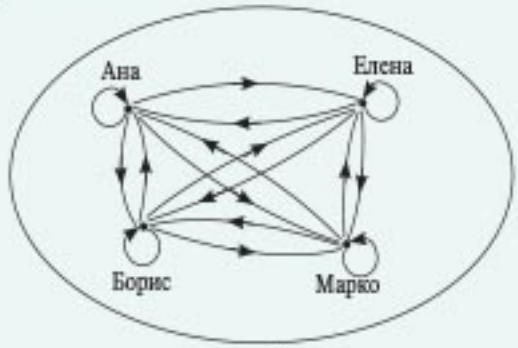
c) Prema relaciji R_2:
Ana može dobiti knjigu posuđivanjem od:
Ana (Ana → Elena → Marko → Boris → Ana),
Elena (Elena → Marko → Boris → Ana),
Marko (Marko → Boris → Ana),
Boris (Boris → Ana)

Elena može dobiti knjigu posuđivanjem od:
Elena (Elena → Marko → Boris → Ana → Elena),
Marko (Marko → Boris → Ana → Elena),
Boris (Boris → Ana → Elena),
Ana (Ana → Elena).

Marko može dobiti knjigu nizom posuđivanja od:
Marko (Marko → Boris → Ana → Elena → Marko),
Boris (Boris → Ana → Elena → Marko),
Ana (Ana → Elena → Marko), Elena (Elena → Marko).

Boris može dobiti knjigu nizom posuđivanja od:
Boris (Boris → Ana → Elena → Marko → Boris),
Ana (Ana → Elena → Marko → Boris),
Elena (Elena → Marko → Boris), Marko (Marko → Boris).

Graf relacije R_2 prikazan je na crtežu 2.



crtež 2

Релација R_2 е:

- refleksivna, jer svaki učenik može dobiti knjigu nizom od četiri posudbe koja počinje od njega. Na primjer,
  Ana → Elena → Marko → Boris → Ana;
- simetrična, jer ako jedan učenik može dobiti knjigu od drugog učenika nizom posudbi, tada i drugi učenik može dobiti knjigu od prvog učenika nizom posudbi. Na primjer, ako Elena može dobiti knjigu nizom posudbi od Borisa, odnosno
  Boris → Ana → Elena, tada Boris može dobiti knjigu nizom posudbi od Elene, odnosno Elena → Marko → Boris.
- tranzitivna, jer ako jedan učenik može dobiti knjigu nizom posudbi od drugog učenika, a drugi učenik može dobiti knjigu nizom posudbi od trećeg učenika, tada prvi učenik može dobiti knjigu nizom posudbi od trećeg učenika. Na primjer, ako Marko može dobiti knjigu nizom posudbi od Ane (Ana → Elena → Marko), a Ana može dobiti knjigu nizom posudbi od Borisa (Boris → Ana), tada Marko može dobiti knjigu nizom posudbi od Borisa (Boris → Ana → Elena → Marko).

Prema tome, R_2 je relacija ekvivalencije.

Zadatak 1

U školi se organizuje veliki koncert, a učenici jedni drugima daju zadatke za pripremu scenografije, muzike, svjetla i promocije. Poznato je da: Ana vodi grupu za scenografiju i daje zadatke Borisu i Eleni;
Boris vodi muzičku grupu i daje zadatke Marku i Nini;
Marko vodi grupu za osvjetljenje i daje zadatke Petru i Damjanu;
Elena vodi grupu za promociju i daje zadatke Ani i Nini.

a) Predstavite relaciju R_1: „...daje zadatak...“, među učenicima tabelarno i grafički.
b) Provjerite da li je relacija R_1 refleksivna, simetrična i tranzitivna.
c) Provjerite da li je relacija R_2: „...dobija zadatak kroz niz zadataka iz...“, refleksivna, simetrična i tranzitivna?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Marko ima vodu, šećer i so i želi napraviti rastvor za sadnju biljaka. On rastvara šećer u vodi, a zatim dodaje so.
   a) Predstavite relaciju R: „...rastvara se prije...“, između supstanci tabelarno i grafički.
   b) Provjerite da li je relacija R tranzitivna i antisimetrična.

2. U laboratoriji, učenik zagrijava vodu u tri čaše: čaša A: od 20°C do 50°C, čaša B: od 30°C do 60°C i čaša C: od 40°C do 80°C.
   a) Predstavite relaciju R: „...ima višu početnu temperaturu od...“, između čaša tabelarno.
   b) Da li je relacija R refleksivna, simetrična i tranzitivna? Objasnite svoj odgovor.

3. Poznato je da je planina Vodno visoka 1011 m, planina Bistra visoka 2621 m, a planina Korab visoka 2764 m.
   a) Predstavite relaciju R: „...je viša od...“, između planina tabelarno i grafički.
   b) Da li je R relacija uređenja? Objasnite svoj odgovor.

4. U učionici za računarstvo, učenici Zamira, Elena, Marko i Boris razmjenjuju datoteke. Poznato je da Zamira šalje datoteku Eleni; Elena šalje datoteku Marku; Marko šalje datoteku Borisu.
   a) Predstavite relaciju R: „...šalje datoteku...“, između učenika tabelarno i grafički.
   b) Da li je R relacija ekvivalencije?

5. U školskom projektu o obnovljivim izvorima, grupe su postavile male generatore tako da: solarni panel obezbjeđuje energiju bateriji, baterija obezbjeđuje energiju motoru, a motor obezbjeđuje energiju ventilatoru.
   a) Predstavite relaciju R_1: „...prenosi energiju na...“, između malih generatora, tabelarno i grafički.
   b) Odredite novu relaciju R_2: „...može uticati u nizu prenosa na...“, i provjerite da li je to relacija ekvivalencije.

6. **Projektni zadatak**

   Primjenom relacija kroz projekat „Relacije u mom gradu“ bolje ćete se upoznati s uslovima u gradu u kojem živite i moći ćete pronaći načine da ih poboljšate.

Za grad u kojem živite, odredite skupove: škole, poslastičarnice, sendvičare, pijace, skladišta, autobuska stajališta, parkovi i muzeji.

Izaberite navedene skupove s najviše 5 elemenata.

a) Odredite relaciju u skupu:
- škole, prema broju učenika;
- škole, prema nivou obrazovanja;
- poslastičarnice, prema broju vrsta slatkiša u ponudi;
- sendvičare, prema broju vrsta sendviča u ponudi;
- pijace, prema cijeni vrste brašna koje se prodaje;
- pijace, prema broju proizvoda u prodaji;
- skladišta, prema zapremini skladišnog prostora;
- autobuska stajališta, prema tome da li postoji direktna linija između njih;
- parkovi, prema površini;
- muzeji, prema broju eksponata.

b) Predstavite relacije grafički i odredite njihova svojstva. Koje od relacija su relacije ekvivalencije, a koje su relacije uređenja?

c) Objasnite kako svojstva određenih relacija utiču na život i dinamiku u gradu.

d) Dodavanjem novih indirektnih uticaja, odredite nove relacije i predstavite ih grafički. Objasnite koji aspekti gradskog života bi se poboljšali.

5. RACIONALNI BROJEVI

Pozitivni i negativni racionalni brojevi

Aktivnost

Selma želi kupiti set od 5 olovaka koji košta 22 denara.
a) Koliko košta olovka?
b) Da li postoji prirodan broj koji možemo koristiti da zapišemo cijenu olovke?
c) Da li postoji cijeli broj koji možemo koristiti da zapišemo cijenu olovke?
č) Kako možemo napisati cijenu olovke?

U skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ operacije oduzimanja i dijeljenja nisu uvijek izvodljive. Na primjer, ne postoji prirodni broj koji je jednak razlici $3 - 5$.

Uvođenjem negativnih brojeva i nule, proširili smo skup prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ u kojima je operacija oduzimanja uvijek izvodljiva.

Međutim, operacija dijeljenja i dalje nije uvijek izvodljiva u skupu prirodnih brojeva.
Na primjer, ne postoji prirodni broj koji je jednak količniku 3:4.
Da bismo prevazišli problem dijeljenja u skupu prirodnih brojeva, proširili smo ga novim brojevima – razlomcima.

U tom smislu, na primjer, prihvatamo da je količnik 3:4 jednak razlomku $\frac{3}{4}$ i da
$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\ldots$
Novi skup razlomaka također sadrži prirodne brojeve, jer svaki prirodni broj može se zapisati kao razlomak s imeniocem 1.

Na primjer, $1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $3=\frac{3}{1}$, ...

Bilo koji broj zapisan kao razlomak $\frac{a}{b}$, gdje je $a, b \in \mathbb{N}$, naziva se **pozitivan racionalan broj**.

Skup svih pozitivnih racionalnih brojeva označavamo sa Q+.

Pišemo: $\mathbb{Q}^+=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

Na primjer, brojevi i $\frac{3}{4}$, 5, $\frac{7}{6}$ i $\frac{11}{5}$ su pozitivni racionalni brojevi.

Zadatak 1

Koje od sljedećih tvrdnji su tačne: a) $\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+$, b) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}^+$, c) $\mathbb{Z}^+\subseteq\mathbb{Q}^+$, č) $\mathbb{Z}^+=\mathbb{Q}^+$?

Operacija dijeljenja nije uvijek izvodljiva u skupu cijelih brojeva.
Na primjer, ne postoji cijeli broj koji je jednak količniku $3:(-4)$.
Da bismo prevazišli problem dijeljenja u skupu cijelih brojeva, potrebno je da ga proširimo novim brojevima.
U tu svrhu, pretpostavit ćemo da, na primjer, važi

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\cdot(-1)}{3\cdot(-1)}=\frac{2}{-3},$$

što znači da razlomci $\frac{-2}{3}$ i $\frac{2}{-3}$ predstavljaju jedan isti broj što ćemo označiti sa $-\frac{2}{3}$,

odnosno važi $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$.

To znači da, na primjer, pored razlomka $\frac{2}{3}$ treba da razgledamo i razlomak $-\frac{2}{3}$.

Novi skup razlomaka također uključuje negativne cijele brojeve, jer se svaki od njih može zapisati kao razlomak s imeniocem 1.

Na primjer, $-1=\frac{-1}{1}$, $-2=\frac{-2}{1}$, $-3=\frac{-3}{1}$,....

Bilo koji broj zapisan kao razlomak $-\frac{a}{b}$, gdje je $a, b \in \mathbb{N}$, naziva se **negativan racionalan broj.**

Skup svih negativnih racionalnih brojeva označen je sa $\mathbb{Q}^-$.

Pišemo: $\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

Na primjer, brojevi $-\frac{3}{4}, -4, -\frac{5}{3}, -\frac{17}{19}$ su negativni racionalni brojevi.

Zadatak 2

Koje od sljedećih tvrdnji su tačne: a) $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Q}^-$, b) $\mathbb{Z}^- \neq \mathbb{Q}^-$, c) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^-$?

Racionalni brojevi

Unija svih pozitivnih racionalnih brojeva, svih negativnih racionalnih brojeva i broja nula naziva se **skup racionalnih brojeva** i označava se sa $\mathbb{Q}$, odnosno

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-.$$

Aktivnost

Razmotri dijagram na crtež 1 i objasni vezu između skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ i skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.



crtež 1

Iz jednakosti $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, gdje su $a, b \in \mathbb{N}$, zaključujemo da svaki racionalan broj možemo zapisati u **standardnom obliku** $\frac{a}{b}$, gdje su $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

Prema tome, skup racionalnih brojeva možemo zapisati u obliku:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}.$$

Primjer 1

U tabeli su date vrijednosti temperatura izmjerenih u Skoplju tokom jednog dana:

vrijeme	10 h ujutro	12 h u podne	15 h poslijepodne	19 h uvečer	22 h noću
temperatura	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

Kolika je promjena temperature po satu u svakom vremenskom intervalu?

U intervalu od 10 h ujutro do 12 h u podne promjena temperature po satu iznosi

$$\frac{14\,°C - 11\,°C}{2\,h} = \frac{3}{2}\,\frac{°C}{h}.$$

U intervalu od 12 h u podne do 15 h poslijepodne promjena temperature po satu iznosi

$$\frac{17\,°C - 14\,°C}{3\,h} = 1\,\frac{°C}{h}.$$

U intervalu od 15 h poslijepodne do 19 h uvečer promjena temperature po satu iznosi

$$\frac{10\,°C - 17\,°C}{4\,h} = \frac{-7}{4}\,\frac{°C}{h}.$$

U intervalu od 19 h uvečer do 22 h noću promjena temperature po satu iznosi

$$\frac{5\,°C - 10\,°C}{3\,h} = \frac{-5}{3}\,\frac{°C}{h}.$$

Mjerni brojevi promjene temperature po satu su racionalni brojevi: $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{-7}{4}$ i $\frac{-5}{3}$.
Među njima, pozitivni racionalni brojevi su $\frac{3}{2}$ i 1, a negativni racionalni brojevi su $\frac{-7}{4}$ i $\frac{-5}{3}$. Broj 1 je također i cijeli i prirodan broj.

Primjer 2

Koji od racionalnih brojeva -4, $\frac{1}{2}$, -3, $\frac{-1}{3}$, 2, $\frac{-3}{7}$, $\frac{5}{6}$, 9, su:

a) pozitivni racionalni brojevi, b) negativni racionalni brojevi,
c) cijeli brojevi, č) prirodni brojevi?

a) Pozitivni racionalni brojevi su $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{5}{6}$ i 9.
b) Negativni racionalni brojevi su -4, -3, $\frac{-1}{3}$ и $\frac{-3}{7}$.
c) Cjeli brojevi su -4, -3, 2 i 9. č) Prirodni brojevi su 2 i 9.

Zadatak 3

Dat je skup $P = \{-1, 0, \frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, 8\}$. Zapiši skup:

a) $M = \{x \mid x \in P \text{ i } x \in \mathbb{Z}\}$, b) $M = \{x \mid x \in P \text{ i } x \in \mathbb{Q}^+\}$, c) $M = \{x \mid x \in P \text{ i } x \in \mathbb{Q}^-\}$.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Pomoću racionalnog broja zapiši rečenicu:
   a) Mira duguje 11 000 denara,
   b) Sonja ima 300 perli,
   c) danas je temperatura 4 °C ispod nule,
   č) jučer je temperatura bila 11 °C iznad nule,
   ć) vodostaj u Ohridskom jezeru je $\frac{15}{2}$ cm niži od normalnog vodostaja.

2. Koja je od sljedećih tvrdnji tačna:
   a) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}^-$, b) $8 \in \mathbb{Z}^-$, c) $-55 \in \mathbb{Q}^+$, č) $0 \in \mathbb{Q}$, ć) $0 \in \mathbb{Z}$?

3. Zapiši skup:
   a) A koji se sastoji od pet pozitivnih racionalnih brojeva,
   b) B koji se sastoji od pet negativnih racionalnih brojeva,
   c) C koji se sastoji od pet racionalnih brojeva.

4. Lejla kaže da je $\frac{5}{3}$ racionalan broj, a da je 5 samo prirodan broj.
   Sead kaže da su oba racionalni brojevi. Ko je u pravu?

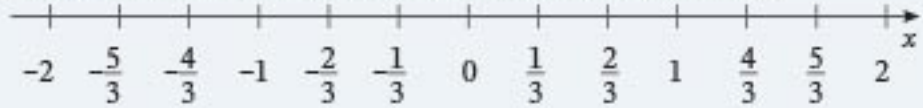
5. Prepiši i popuni tabelu prema riješenom primjeru u prvom redu.

	skup						
broj	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^+$	$\mathbb{Q}^-$
$-\frac{1}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
0							
$-\frac{9}{2}$							
7							
-11							

6. Koja je od sljedećih tvrdnji tačna:
   a) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^+$, b) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, c) $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, č) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\} = \mathbb{Q}$,
   ć) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \emptyset$, d) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$, dž) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, đ) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$?

Istraživanje

1. Na slici 2 prikazano je nekoliko racionalnih brojeva na brojevnoj osi.



crtež 2

   a) Prisjeti se pravila za prikazivanje cijelih brojeva na brojevnoj osi.
   Prema sličnom pravilu prikazujemo i racionalne brojeve na brojevnoj osi.
   Pokušaj objasniti pravilo za prikazivanje racionalnih brojeva na brojevnoj osi.
   Koji su racionalni brojevi prikazani desno od nule, a koji lijevo od nule?

b) Nacrtaj brojevnu osu i odaberi 6 racionalnih brojeva, 3 pozitivna i 3 negativna racionalna broja.

2. a) Prisjeti se pravila za uspoređivanje cijelih brojeva pomoću brojevne ose. Pokušaj objasniti pravilo za uspoređivanje racionalnih brojeva pomoću brojevne ose.

b) Prisjeti se da za pozitivne racionalne brojeve važi:

$\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$ jer $2\cdot 5<3\cdot 4$; $\frac{7}{6}>\frac{4}{9}$ jer $7\cdot 9>4\cdot 6$; $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ jer $3\cdot 8=6\cdot 4$.

Prema istom pravilu uporedi brojeve:

$\frac{-2}{3}$ i $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$ i $\frac{-4}{5}$; $\frac{-4}{5}$ i $\frac{-4}{5}$, $\frac{-2}{3}$ i $\frac{-4}{6}$.

Potom potvrdi svoj odgovor pomoću brojevne ose.

c) Izvedi opće pravilo za uspoređivanje racionalnih brojeva zapisanih u standardnom obliku.

6. BESKONAČNI PERIODIČNI DECIMALNI BROJEVI

Prisjeti se da se svaki razlomak može zapisati decimalnim brojem određivanjem količnika brojioca i imenioca.

Aktivnost

Zapiši obojeni dio kruga:

a) razlomkom,

b) decimalnim brojem.



Primjer 1

Zapiši razlomak decimalnim brojem: a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{3}$.

a) $\frac{3}{4}=0,75$ Kada se dijeljenje završi, dobijamo **konačan decimalni broj**.

b) $\frac{1}{3}=0,333\ldots$ Kada se dijeljenje ne završi, dobijamo **beskonačan periodični decimalni broj** ili, kraće, **periodični decimalni broj**.

- Periodični decimalni broj kod kojeg se neposredno iza decimalnog zareza nalazi konačan niz cifara koji se ponavlja istim redoslijedom naziva se **čisti periodični decimalni broj.**
- Periodični decimalni broj kod kojeg se nakon nekoliko neperiodičnih decimala nalazi konačan niz cifara koji se ponavlja istim redoslijedom naziva se **mješoviti periodični decimalni broj.**
- Niz cifara koji se ponavlja naziva se **period decimalnog broja.**

Konačni decimalni brojevi su, na primjer, brojevi: 2,65 i 36,567834.
Broj 0,3333333333333... = 0,(3) je čisti periodični decimalni broj s periodom 3.
Broj 2,3(27) = 2,3272727272727... je mješoviti periodični decimalni broj s periodom 27.

Zadatak 1

Zapiši razlomak decimalnim brojem. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{11}{37}$.
Koji je od dobijenih decimalnih brojeva konačan decimalni broj, a koji beskonačan decimalni broj? Koliki je period beskonačnog decimalnog broja?

Primjer 2

Zapiši decimalni broj razlomkom: a) 0,25; b) 0,(16); c) 2,36(4).

a) Broj 0,25 je konačan decimalni broj. On se može zapisati u obliku decimalnog razlomka:

$$x = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

b) Broj 0,(16) je čisti periodični decimalni broj s periodom 16.
On se može zapisati kao razlomak sljedećim postupkom:

$0,(16) = x$	Nepoznati razlomak označavamo sa x.
$0,(16) \cdot 100 = x \cdot 100$	Period je dvocifren broj, pa zato
$16,(16) = x \cdot 100$	obje strane množimo sa 100.
$16 + 0,(16) = x \cdot 100$	Decimalni broj zapisujemo kao zbir cijelog broja i datog decimalnog broja.
$16 + x = x \cdot 100$	Broj 0,(16) zamjenjujemo sa x i rješavamo linearnu jednačinu po nepoznatoj x.
$16 = x \cdot 100 - x$	
$16 = x(100 - 1)$	
$x = \frac{16}{100-1} = \frac{16}{99}$.	Njeno rješenje je: $x = \frac{16}{99}$.

Prema tome, dobijamo da $0,(16) = \frac{16}{99}$.

c) Broj 2,36(4) je mješoviti periodični decimalni broj. On se može zapisati kao razlomak na sljedeći način:

$2{,}36(4) = x$ — Nepoznati razlomak označavamo sa x.

$236{,}(4) = 100 \cdot x$ — Ponavljanje počinje nakon druge decimale, pa obje strane množimo sa 100.

$2364{,}(4) = 1000 \cdot x$ — Ima 3 cifre prije početka perioda decimalnog broja, pa obje strane jednačine 2,36(4)=x množimo sa 1000. Oduzimamo dvije jednačine.

$2364{,}(4) - 236{,}(4) = 1000 \cdot x - 100 \cdot x$

$2128 = 900 \cdot x$

$x = \frac{2128}{900} = \frac{532}{225} = 2\frac{82}{225}.$

Prema tome, dobijamo da $2{,}36(4) = 2\frac{82}{225}$.

Zadatak 2

Zapiši decimalni broj razlomkom: a) 0,75; b) 0,(6); c) 2,1(45).

Zadatak 3

Na biciklističkoj ruti „Zeleni prsten" trasa se sastoji od tri dijela: dio A dužine 0,(6) km, dio B dužine 1,2(3) km i dio C dužine 2,(45) km.

a) Zapiši dužine kao razlomke.

b) Kolika je dužina jednog cijelog kruga?

c) Marko je napravio 3 kruga, a zatim je prešao još dio A. Koliko je kilometara prešao Marko?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Zapiši razlomak decimalnim brojem: a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{9}{20}$, č) $\frac{77}{390}$, ć) $\frac{77}{330}$.
2. Zapiši broj koristeći oznaku za period decimalnog broja:
   a) 0,3989898..., b) 4,7102102..., c) 0,2540314031..., č) 243,2526161....
3. Odredi period decimalnog broja zapisanog razlomkom: a) $\frac{7}{9}$, b) $\frac{42}{37}$, c) $\frac{118}{123}$.
4. Zapiši periodični decimalni broj razlomkom:
   a) 0,(7); b) 3,(21); c) 1,2(34); č) 4,3(123); ć) 5,12(7).
5. Za postavljanje šatora sijeku se tri užeta dužine 0,(8) m, 2,3(5) m i 3,(27) m.
   a) Izrazi dužinu svakog užeta razlomkom.
   b) Mitko je imao uže dugo 10 m. Koliko će mu metara užeta preostati nakon sječenja?
6. Jedan automobil prešao je put dug 1 km. Prvi dio puta, dug 0,4 km, automobil je prešao prosječnom brzinom od 0,(833) km/h. Drugi dio puta, dug 0,6 km, automobil se kretao brzinom od 1,2(5) km/h.
   a) Zapiši mjerni broj svake od brzina razlomkom.
   b) Koliko je vremena, u satima, bilo potrebno da se pređe svaki dio puta?

7. JEDNAKOST RAZLOMAKA, DECIMALNIH BROJEVA I PROCENATA

Aktivnost

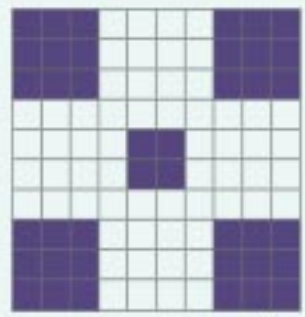
Ana je imala dio čokolade. Borjan kaže da je Ana pojela $\frac{1}{2}$ od čokolade, Merita kaže da je pojela 0,5 čokolade, a Suad kaže da je pojela 50% čokolade. Da li su Borjan, Merita i Suad, na različite načine, iskazali isti dio čokolade koji je Ana pojela?
Objasni svoj odgovor.

Primjer 1

Koliki je dio kvadrata na slici 1 obojen?

Obojeni dio kvadrata možemo zapisati na tri načina:

$\frac{40}{100}$ kvadrata,
0,4 kvadrata,
40% kvadrata.



crtež 1

Primjer 2

Izrazi razlomak u procentima: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{1}{3}$.

a) $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$, b) $\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=\frac{300}{8}\%=37{,}5\%$, c) $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\cdot 100\right)\%\approx 33{,}3\%$.

Primjer 3

Izrazi decimalni broj u procentima: a) 0,42; b) 3,6; c) 0,054.

a) $0{,}42=(0{,}42\cdot 100)\%=42\%$, b) $3{,}6=(3{,}6\cdot 100)\%=360\%$, c) $0{,}054=(0{,}054\cdot 100)\%=5{,}4\%$

Broj ili razlomak izražava se u procentima tako što se prvo pomnoži sa 100, a zatim se uz dobijeni proizvod zapiše znak „%“ za procente.

Primjer 4

Izrazi procente razlomkom: a) 37%, b) 18%, c) 56%.

a) $37\% = \frac{37}{100}$, b) $18\% = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$, c) $56\% = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$.

Primjer 5

Izrazi procente decimalnim brojem: a) 8%, b) 70%, c) 35%.

a) $8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$; b) $70\% = \frac{70}{100} = 0{,}7$; c) $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$.

Procenti se izražavaju brojem tako što se broj procenata podijeli sa 100, a zatim se izostavi znak „%“ za procente.

Primjer 6

Izrazi u procentima dio pravougaonika na slici 2 obojen zelenom bojom.

$\frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5} \cdot 100\right)\% = 80\%$ pravougaonika obojen je zelenom bojom.



crtež 2

Zadatak 2

Izrazi u procentima obojeni dio oblika na slici 3:

a) b) c) č)



crtež 3

Primjer 7

Marija je naručila picu u restoranu podijeljenu na 8 parčadi. Pojela je 3 parčeta, a njena drugarica Arta pojela je 1 parče. Zapiši razlomkom i procentom dio pice:

a) koji je pojela Marija, b) koji je pojela Arta, c) koji je ostao nepojeden.

a) Marija je pojela $\frac{3}{8}$ pice, odnosno 37,5% pice, jer

$\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=37{,}5\%$.

b) Arta je pojela $\frac{1}{8}$ pice, odnosno 12,5% pice, jer

$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{8}\cdot 100\right)\%=12{,}5\%$.

c) Dio pice koji je ostao nepojeden je $\frac{1}{2}$ pice, odnosno 50% pice, jer

$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{4}{8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$.

Primjer 8

Mina želi kupiti voće za cijelu sedmicu. U prodavnici su istaknute cijene:

jabuke: $\frac{1}{2}$ kg za 30 denara, banane: 0,75 kg za 45 denara, narandže: 40% kg za 24 denara.

a) Izračunaj cijenu po kilogramu za svako voće.

b) Napravi tabelu u kojoj ćeš predstaviti sve vrste voća s njihovim količinama u obliku razlomka, decimalnog broja i procenta, te cijenama po kilogramu.

c) Mina ima 90 denara. Šta može kupiti da iskoristi cijeli budžet?

a) Ako $\frac{1}{2}$ kg jabuka košta 30 denara, tada će 1 kg koštati $30 : \frac{1}{2} = 30 \cdot 2 = 60$ denara.

Ako 0,75 kg banana košta 45 denara, tada će 1 kg koštati $45 : 0{,}75 = 60$ denara.

Ako 0,4 kg narandži košta 24 denara, tada će 1 kg koštati

b)

Voće	Razlomak	Decimalni broj	Procenat	Cijena za 1 kg
Jabuke	$\frac{1}{2}$	0,5	50%	60 денари
Banane	$\frac{3}{4}$	0,75	75%	60 денари
Narandže	$\frac{2}{5}$	0,4	40%	60 денари

c) Sve vrste voća imaju istu cijenu po kilogramu. Mina može kombinovati različite vrste voća ukupne mase 1,5 kg kako bi iskoristila cijeli budžet.

Zadatak 3

U školskoj kuhinji učenici za užinu kupuju sokove. Andrej je popio 3/5 litre soka od narandže, Bela je popila 0,6 litre soka od jabuke i Vanja je popila 60% litre soka od grejpfruta.

a) Napravi tabelu u kojoj ćeš svaku količinu popijenog soka zapisati razlomkom, decimalnim brojem i procentom.

b) Koliko je mililitara soka popio svaki učenik?

c) Koji je učenik popio najviše soka, a koji najmanje?

č) Koristeći tabelu napiši kratak zaključak.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Precrtaj i popuni tabelu:

Procenat	42%				12%
Decimalni broj		0,65		0,07	
Razlomak			$\frac{17}{20}$		

2. Na takmičenju iz matematike jedan učenik riješio je $\frac{2}{5}$ zadataka.

a) Izrazi razlomak $\frac{2}{5}$ decimalnim brojem..

b) Izrazi isti razlomak u procentima.

c) Da li 0,4 i 40% predstavljaju jednake količine kao $\frac{2}{5}$? Obrazloži odgovor.

č) Ako je drugi učenik riješio 75% zadataka, koji su odgovarajući razlomak i decimalni broj?

3. Во продавница Јусуф купил $\frac{2}{3}$ kg јаболка, Марко купил 0,5 kg банани і Ана купила 80% од еден килограм портокали. Од кој вид овошје е купено најголемо количество?

4. Богдан трчал 3 дена по иста патека. Првиот ден истрчал 0,6 од патеката, вториот ден истрчал $\frac{5}{8}$ од патеката, і третиот ден истрчал 55% од патеката.
Во кој ден истрчал најголем дел од патеката?

5. Sofija, Damjan i Arbnora imali su isti iznos novca. Uložili su novac u investicioni fond. Sofija je uložila 0,75 svog iznosa, Damjan je uložio $\frac{5}{8}$ svog iznosa, a Arbnora je uložila 70% svog iznosa.
Koji je učenik uložio najviše?

Skeniraj kod i riješi zadatke.

6. Učenici prave modele od gline. Melita je završila $\frac{9}{20}$ svog modela, Anja je završila 0,45 svog modela, a Marko je završio 50% svog modela.
Procijeni ko je napravio najveći dio modela i predloži kako bi mogli spojiti sva tri modela u jedan kako bi dobili cjelovit model.

Istraživanje

Precrtaj dijagram sa crteža 4 u svesku.

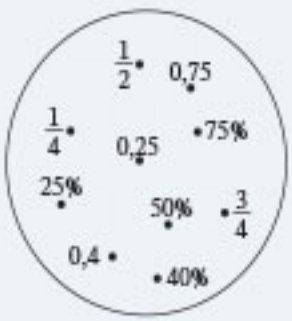
a) Poveži razlomak, decimalni broj i procenat koji izražavaju istu količinu.

b) Da li je relacija

R: „... predstavlja istu količinu kao ...“

definisana na skupu predstavljenom dijagramom refleksivna, simetrična i tranzitivna?

c) Da li je relacija R relacija ekvivalencije?



crtež 4

crtež 4

8. IZRAČUNAVANJE RAZLOMAKA I PROCENATA KOLIČINA

Aktivnost

U kutiji se nalazi 100 bombona. 25% su crvene, 50% su plave, a ostale su žute.
a) Koliko crvenih, koliko plavih i koliko žutih bombona ima u kutiji?
b) Koliki dio bombona od ukupnog broja su žute? Izrazi dio žutih bombona kao razlomak i kao procenat.
c) Ako pojedeš 50% svih bombona, koliko će ih ostati?

Primjer 1

U školskoj biblioteci kupljeno je 120 knjiga. Od njih, 40% je naučna fantastika, $\frac{1}{4}$ su romani, a preostali dio knjiga su drugih kategorija.
a) Koliko knjiga je iz oblasti naučne fantastike? b) Koliko knjiga su romani?
c) Izrazi preostale knjige kao razlomak i kao procenat od ukupnog broja knjiga.
č) Koja kategorija ima najviše knjiga, a koja najmanje?

a) Naučna literatura je 40% od 120 knjiga, tj. $0{,}4 \cdot 120 = 48$ knjiga.

b) $\frac{1}{4}$ od 120 knjiga su romani, odnosno $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$.

c) Od ostalih kategorija ima $120 - (48 + 30) = 120 - 78 = 42$ knjige.

Kao razlomak od 120 knjiga, preostale kategorije su $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$.

Kao procenat od 120 knjiga, preostale kategorije su $\frac{42}{120} \cdot 100 = 35\%$.

č)

kategorija	broj knjiga	razlomak	procenat
naučna literatura	48	$\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$	40%
romani	30	$\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$	25%
ostalo	42	$\frac{7}{20}$	35%

Najviše knjiga je naučna literatura: 48 knjiga ili 40% od ukupnog broja knjiga.
Najmanje ima romana: 30 knjiga ili 25% od ukupnog broja knjiga.
Preostale kategorije čine 42 knjige ili 35% ukupnog broja knjiga.

Zadatak 1

U školskom sportskom klubu nabavlja se nova sportska oprema. Ukupno je nabavljeno 150 rekvizita, od kojih su $\frac{1}{3}$ lopte za fudbal, 20% su teniski reketi, a preostali dio su konopci za vježbanje.

a) Koliko je fudbalskih lopti nabavljeno?
b) Koliko je teniskih reketa nabavljeno?
c) Izrazi broj konopaca kao razlomak i kao procenat od ukupne količine.
č) Uporedi koja kategorija opreme je najviše, a koja najmanje zastupljena.
ć) Ukoliko se doda još 10 konopaca, da li će se procenat konopaca povećati ili smanjiti? Objasni svoj odgovor.

Primjer 2

U laboratoriji se priprema vodeni rastvor šećera na sobnoj temperaturi. U 300 ml vode rastvori se 100 g šećera. Zatim se doda još 200 g šećera, koji se potpuno rastvori.
a) Koji dio mase početnog rastvora predstavlja šećer?
b) Koliki je procenat šećera u početnom rastvoru?
c) Kolíki je novi procenat šećera nakon dodavanja još 200 g šećera?
č) Da li se koncentracija povećala i za koliko procenata?

a) Pod pretpostavkom da je 1 ml vode ≈ 1 g vode, šećer predstavlja

$$\frac{100\,\text{g}}{(300\,\text{g}+100\,\text{g})}=\frac{100\,\text{g}}{400\,\text{g}}=\frac{1}{4}$$ od početnog rastvora.

b) Procenat šećera u početnom rastvoru je

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\%.$$

c) Nakon dodavanja 200 g šećera, šećer predstavlja

$$\frac{100\,\text{g}+200\,\text{g}}{400\,\text{g}+200\,\text{g}}=\frac{300\,\text{g}}{600\,\text{g}}=\frac{1}{2}$$ od novog rastvora.

Procenat šećera u novom rastvoru je

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=50\%.$$

č) Koncentracija šećera u rastvoru povećala se za

$$50\%-25\%=25\%$$

što je i očekivano, pošto se količina šećera povećala, a količina vode je ostala ista.

Zadatak 2

U školskoj laboratoriji ispituje se sastav ćelija algi. U jednom uzorku ima 600 ćelija. Od kojih su $\frac{2}{3}$ ćelije zelenih algi, 20% su ćelije crvenih algi, a ostatak su ćelije drugih vrsta algi.
a) Koliko ćelija je iz zelenih algi?
b) Koliko ćelija je iz crvenih algi?
c) Koliko ćelija je iz drugih vrsta algi? Izrazi njihov broj kao razlomak i procenat od ukupnog broja ćelija.
č) Uporedi koja kategorija ćelija algi je najviše zastupljena, a koja najmanje.
ć) Ako se broj ćelija crvenih algi poveća za 30 ćelija, koliko će se promijeniti procenat ćelija crvenih algi?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. U školskoj menzi priprema se ukupno 200 porcija za ručak. $\frac{3}{8}$ od porcija je za vegetarijance, 30% porcija je bez glutena i nisu vegetarijanske, a ostatak su redovne porcije.

a) Koliko je vegetarijanskih porcija?
b) Koliko porcija je bez glutena?
c) Koliko je redovnih porcija? Izrazi njihov broj kao razlomak i kao procenat od ukupnog broja porcija.
č) Koja vrsta porcija je najviše zastupljena, a koja je najmanje?
ć) Ako se pripremi još 20 redovnih porcija, kako će se promijeniti procenat redovnih porcija?

2. U prodavnici je Petar kupio tri artikla. Prvi je koštao 1.200 denara s popustom od 15%, drugi je koštao 850 denara s popustom od 20%, a treći je koštao 600 denara s popustom od 10%.

a) Izračunaj koliko će Petar platiti za svaki artikal poslije popusta.
b) Koliko će denara ukupno uštedjeti poslije popusta?
c) Izrazi procenat ukupne cijene svakog artikla poslije popusta.

3. U školi ima 240 učenika, koji su podijeljeni u grupe za projekat. $\frac{1}{3}$ učenika je u grupi za istraživanje životne sredine, 25% je u grupi za računarstvo, a ostali su u grupi za fiziku.

a) Koliko učenika ima u svakoj grupi?
b) Izrazi broj učenika u svakoj grupi kao procenat od ukupnog broja učenika.
c) Uporedi grupe i odredi koja ima najviše, a koja najmanje učenika.

4. U eksperimentu iz hemije pravi se rastvor. 90 g šećera rastvoreno je u 750 ml vode. Zatim se dodaje još 60 g šećera.

a) Izračunaj procenat šećera u rastvoru prije dodavanja.
b) Izračunaj novi procenat šećera poslije dodavanja šećera.
c) Izrazi razlomkom povećanje šećera kao dio početnog rastvora.

5. U sportskom klubu nabavlja se 180 rekvizita. $\frac{2}{5}$ rekvizita su fudbalske lopte, 30% su košarkaške lopte, a ostalo su teniski reketi.

a) Koliko rekvizita ima svaka kategorija rekvizita?
b) Izrazi broj rekvizita kao razlomak i procenat od ukupnog broja rekvizita.
c) Ako se proda 10 fudbalskih lopti, kako će to uticati na procenat fudbalskih lopti?

Skeniraj kod i riješi zadatke.

6. U istraživanju jednog jezera bilo je 600 riba. $\frac{1}{4}$ su bile crvenoperke, a 150 su bili šarani, ostatak su činile druge vrste riba.

a) Koliko riba pripada drugim vrstama? Izrazi kao razlomak dio drugih vrsta riba u odnosu na sve ribe u jezeru.
b) Izrazi kao procenat broj riba u svakoj kategoriji.
c) Koja kategorija riba je najbrojnija u jezeru? Da li su brojnije crvenoperke ili šarani?

9. PRIMJENA PROCENATA

Aktivnost

U jednoj prodavnici prodaju se sljedeći proizvodi: pegla za 1200 denara, televizor za 32000 denara, laptop za 78000 denara i mikrovalna pećnica za 4.000 denara.
Ove cijene su porasle za 20%.

a) Za koliko denara je porasla cijena svakog proizvoda?

b) Kolika je cijena svakog proizvoda nakon povećanja?

Primjer 1

U tržnom centru jakna košta 3600 denara. Prvo je zbog akcije snižena za 25%, a zatim je nova cijena povećana za 10% zbog dodavanja PDV-a.
a) Koliko košta jakna poslije sniženja?
b) Koliko će koštati nakon povećanja prethodno snižene cijene?
c) Ako Mila ima 3000 denara, da li će moći kupiti jaknu? Objasni svoj odgovor.

a) Sniženje cijene jakne je 25% od 3600 denara i iznosi

$$25\% \cdot 3600 = \frac{25}{100} \cdot 3600 = 900 \text{ denara.}$$

Nova cijena jakne je 3600 – 900 = 2700 denara.
Do nove cijene jakne možemo doći izračunavanjem 100% − 25% = 75% od cijene jakne:

$$75\% \cdot 3600 = \frac{75}{100} \cdot 3600 = 2700 \text{ denara.}$$

b) Povećanje nove cijene od 10%, zbog dodavanja PDV-a, iznosi 10% od 2700 i iznosi

$$10\% \cdot 2700 = \frac{10}{100} \cdot 2700 = 270 \text{ denara.}$$

Cijena jakne s PDV-om je 2700 + 270 = 2970 denara.

c) Mila ima 3000 denara. Zato što je
3000 – 2970 = 30 denara,
Mila će moći kupiti jaknu i ostat će joj 30 denara.

Zadatak 1

Porodica Petrov je u januaru platila račun za struju od 4800 denara.
U februaru je potrošnja smanjena za 15% zbog štednje, ali je zbog povećanja cijene struje račun za mart povećan za 20%.
a) Koliki je račun za februar?
b) Koliki je račun za mart (nakon povećanja)?
c) Za koliko denara je martovski račun veći u odnosu na januarski račun?

Primjer 2

Laboratorijska posuda sadrži 500 g vode. Zbog zagrijavanja, 12% vode je isparilo tokom eksperimenta. Zatim se u posudu dodaje 100 g soli i miješa dok se ne rastvori.

a) Kolika je nova masa vode nakon isparavanja?

b) Kolika je ukupna masa rastvora nakon dodavanja soli?

a) Masa isparene vode je 12% od 500 i iznosi

$$12\% \cdot 500 = \frac{12}{100} \cdot 500 = 60 \text{ g.}$$

Nova masa vode je $500 - 60 = 440$ g.

b) Ukupna masa rastvora je 440 g (voda) + 100 g (so) = 540 g.

Zadatak 2

U Petrijevoj posudi gaji se kolonija bakterija koja na početku ima 250.000 bakterija. Poslije 6 sati, broj bakterija se povećao za 40%. Poslije dodatnih 6 sati, broj bakterija se povećao za još 25%.

a) Koliki je broj bakterija poslije prvih 6 sati?

b) Koliki je broj bakterija poslije ukupno 12 sati?

c) Za koliko procenata se ukupno povećala kolonija u odnosu na početni broj bakterija?



ZADACI ZA VJEŽBANJE

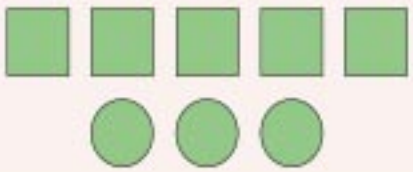
1. U jednoj prodavnici, cijena laptopa iznosi 48.000 denara. U periodu akcijskog sniženja, cijena je prvo snižena za 15%, a zatim za dodatnih 10% od nove cijene.
   a) Kolika je konačna cijena laptopa?
   b) Da li je popust isti kao i jednostavno umanjivanje za 25%?
2. U akvarijumu je bilo 120 riba. Poslije nekoliko mjeseci, broj riba se povećao za 35%. Zatim je 20% novog broja riba uginulo zbog nedostatka kiseonika u akvarijumu. Koliko je na kraju bilo riba u akvarijumu?
3. Jedno jezero ima zapreminu od 50.000.000 m^3 vode. Za vrijeme suše, nivo vode se smanjuje za 12%. Sljedeće godine, padavine povećavaju količinu vode za 8% od nove zapremine. Kolika je zapremina jezera nakon ovih promjena?
4. U laboratoriji se priprema rastvor sa 800 g vode i 200 g soli. Zatim isparava 10% vode. Kolika je nova masa rastvora i kolika je procentualna koncentracija soli nakon isparavanja?
5. Jedan USB ima kapacitet od 64 GB. U njemu su sačuvane datoteke koje zauzimaju 75% prostora. Od tih podataka, učenik je obrisao 20% da bi oslobodio prostor. Koliko GB memorije je slobodno nakon brisanja?
6. Ako se cijena proizvoda prvo poveća za 10%, a zatim smanji za 10%, da li je konačna cijena ista kao početna cijena? Objasni svoj odgovor.

10. RAZMJERA

Uprošćavanje razmjere

Aktivnost

Prema crtežu 1, zapišite količnik:
a) broja krugova i broja kvadrata,
b) broja kvadrata i broja krugova.
Kako se zovu i šta pokazuju količnici koje si zapisao?



crtež 1

Skeniraj kod i prisjeti se razmjere.

Podsjetimo se da se količnik $a : b$ mjerenih brojeva dvije identične veličine, koje su mjerene u istoj jedinici mjere, naziva **razmjera** te dvije veličine.
Brojevi a i b nazivaju se **članovi** razmjere. Zapis $a : b$ čitamo kao „a prema b".

Primjer 1

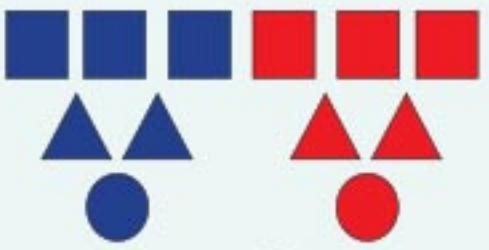
Date razmjere zapiši u skraćenom obliku kao jednu razmjeru.
a) 4 : 9 i 9 : 5, b) 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 i 8 : 3.

a) Iz razmjera 4 : 9 i 9 : 5 proizlazi skraćeni zapis 4 : 9 : 5, koji nazivamo razmjera. Sastavljena je od tri člana i čita se kao „4 prema 9 prema 5".
b) Razmjerama 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 i 8 : 3 određuje se razmjera 7 : 2 : 9 : 8 : 3, koja ima pet članova.

Primjer 2

Prema crtežu 2, zapiši razmjeru:
a) trouglova i kvadrata,
b) krugova i trouglova i kvadrata.

a) Razmjera trouglova i kvadrata je 4 : 6.
To znači da **na svaka 4 trougla ima 6 kvadrata.**
Možemo vidjeti da **na svaka 2 trougla ima 3 kvadrata**, tako da se razmjera 4 : 6 može uprostiti na razmjeru 2 : 3. Pišemo 4 : 6 = 2 : 3 u smislu da dvije razmjere određuju isti odnos.



crtež 2

Iz razmjere 4 : 6 dobija se razmjera 2 : 3, kada se svaki njen član podijeli sa NZD (4, 6) = 2.
Članovi razmjere 2 : 3 međusobno su prosti prirodni brojevi, odnosno
NZD (2, 3) = 1, i ne može se dalje uprošćavati.

b) Razmjera krugova prema trouglovima i kvadratima je 2 : 4 : 6.
Znači, **na svaka 2 kruga ima 4 trougla i na svaka 4 trougla ima 6 kvadrata.**
Možemo vidjeti da **na svaki 1 krug postoje 2 trougla i na svaka 2 trougla postoje 3 kvadrata**, tako da se razmjera 2 : 4 : 6 može **uprostiti** na razmjeru 1 : 2 : 3.

Pišemo 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3, što znači da obje razmjere određuju isti odnos.
Iz razmjere 2 : 4 : 6 dobija se 1 : 2 : 3, kada se svaki njen član podijeli sa NZD (2, 4, 6) = 2.
Za razmjeru 1 : 2 : 3 važi NZD (1, 2, 3) = 1 i ne može se dalje uprošćavati.

Primjer 3

Uprosti razmjeru:

a) 3 : 18 : 6 : 30, b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, c) 1,25 : 0,5 : 2,75, č) 45% : 52% : 17%, ć) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm.

a) $3 : 18 : 6 : 30 = 1 : 6 : 2 : 10$ — Svaki član dijelimo sa NZD (3, 18, 6, 30) = 3.

b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \left(12 \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(12 \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(12 \cdot \frac{3}{4}\right)$
$= 6 : 8 : 9$ — Svaki član dijelimo sa NZS (2, 3, 4) = 12.

c) $1{,}25 : 0{,}5 : 2{,}75 = 125 : 50 : 275$
$= 5 : 2 : 11$ — Svaki član množimo sa 100 (dekadnom jedinicom sa toliko nula koliko ima decimalni broj sa najviše decimalnih mjesta).

č) $45\% : 52\% : 17\% = \frac{45}{100} : \frac{52}{100} : \frac{17}{100}$
$= 45 : 52 : 17$ — Procente zapisujemo razlomkom.

ć) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm = 25 cm : 10 cm : 3 cm
= 25 : 10 : 3 — Dužine izražavamo u **istoj jedinici.**

Zadatak 1

Uprosti razmjeru a) 36% : 0,6 : 6, b) 0,5 kg : 250 g : 1,25 kg.

Zadatak 2

Komšije Ace i Mirsad pomiješali su plavu, žutu i bijelu boju da bi ofarbali svoje ograde.
Ace je pomiješao: 2,4 *l* plave, 4 *l* žute i 1,6 *l* bijele boje.
Mirsad je pomiješao: 1,8 *l* plave, 3 *l* žute i 1,2 *l* bijele boje.
Da li su dobili istu količinu rastvorene boje? Da li su dobili istu nijansu zelene?
Uputstvo: Zapiši razmjeru kojom su As i Mirsad pomiješali boje, a zatim je uprosti.

Dijeljenje količine u datoj razmjeri

Kada se količina podijeli na dva ili više dijelova u datoj razmjeri, možemo saznati koliko količine sadrži svaki dio.

Aktivnost

Prijateljice Iva i Marija podijelile su rođendansku tortu u razmjeri 2 : 3.

a) Ako je Iva dobila 2 parčeta, koliko parčadi je dobila Marija?

b) Na koliko jednakih parčadi je isječena torta da bi se podijelila prijateljicama?



Primjer 1

Iznos od 250 denara podijeljen je između Luke, Iline i Seada u razmjeri 3 : 5 : 2. Koliko je denara svako od njih dobio?

Za svaka 3 dijela koja Luka dobije, Ilina dobija 5 dijelova, a Sead dobija 2 dijela. Imamo ukupno

$3 + 5 + 2 = 10$ dijelova.

Iznos od 250 denara podijelit ćemo sa 10 da bismo pronašli vrijednost 1 dijela:

$250 : 10 = 25$ denara.

Jedan dio ima vrijednost od 25 denara.

Luka je dobio $3 \cdot 25 = 75$ denara, Ilina je dobila $5 \cdot 25 = 125$ denara, a Sead je dobio

$2 \cdot 25 = 50$ denara.

Zadatak 1

Podijeli: a) 48 bombona u razmjeri 1 : 2 : 3, b) 440 metara u razmjeri 6 : 3 : 1.

Primjer 2

Autoput dug 140 km podijeljen je na dionice u razmjeri 2 : 5 : 3 : 4. Koliko kilometara ima svaka dionica?

Prva dionica sastoji se od 2 dijela, druga dionica od 5 dijelova, treća dionica od 3 dijela i četvrta dionica od 4 dijela. Ukupno imamo

$2 + 5 + 3 + 4 = 14$ dijelova.

Dužina autoputa od 140 km bit će podijeljena sa 14 da bi se dobila dužina 1 dionice:

$140 : 14 = 10$ km.

Jedna dionica ima dužinu od 10 km. Shodno tome: prva dionica je duga $2 \cdot 10 = 20$ km, druga dionica je duga $5 \cdot 10 = 50$ km, treća dionica je duga $3 \cdot 10 = 30$ km i četvrta dionica je duga

$4 \cdot 10 = 40$ km.

Zadatak 2

U košarkaškoj utakmici, tim A pobijedio je tim B rezultatom 72 : 48. Broj postignutih poena po igraču dat je u tabeli:

Ekipa A

igrač	broj postignutih poena
Mirko	8
Senad	16
Filip	22
Mensur	18
Ivan	8

Ekipa B

igrač	broj postignutih poena
Besim	6
Savo	18
Fatmir	4
Ilija	12
Marko	8

Organizator je podijelio:

a) 20 vaučera za sportsku opremu timovima, prema broju osvojenih poena.
Po koliko vaučera je dobio svaki tim?

b) 60 vaučera za posjetu sportskim događajima igračima, prema broju osvojenih poena.
Koliko vaučera je dobio svaki igrač?

Primjer 3

Atletičari Boris, Ana i Halil trčali su krugove na atletskoj stazi.
Broj krugova Borisa prema broju krugova Ane prema broju krugova Halila bio je u razmjeri 2 : 3 : 4. Poznato je da je Boris istrčao 24 kruga.
Koliko krugova je istrčala Ana, a koliko Halil?
Koliko krugova su atletičari istrčali zajedno?

Boris je trčao 24 kruga, što predstavlja 2 dijela od ukupnog broja krugova.
Dakle, 1 dio krugova je 12 krugova. Ana je istrčala $3 \cdot 12 = 36$ krugova,
a Halil $4 \cdot 12 = 48$ krugova. Sportisti su ukupno istrčali $24 + 36 + 48 = 108$ krugova.

Zadatak 3

Lara je napravila kolač u kojem je odnos brašna, šećera i voća 8 : 4 : 2. Lina ima 400 g brašna i hoće da napravi kolač istog ukusa.
Koliko grama šećera Lina treba da upotrijebi za svoj kolač? Koliko grama voća treba da upotrijebi?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Uprosti razmjeru:

a) 96 : 60 : 120 : 36, b) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : \frac{1}{6} : \frac{7}{8}$, c) 1,6 : 6,4 : 4 : 2,4.

2. Uprosti razmjeru:
   a) 1800 g : 3 kg : 60 dag, b) 450 mm : 75 cm : 1,5 m : 1 m, c) 3 km : 150 m : 450 m,
   č) 25 cm : 1 m : 1,5 dm, ć) 120 minuta : 4 sata : 2,5 sata, d) 900 ml : 4,5 *l* : 13,5 *dl*.

3. Dekorativna traka sastoji se od tri dijela. Prvi dio je dug 1,2 m, drugi dio je dug 80 cm, a treći dio je dug 450 mm. Zapiši i uprosti razmjeru koja odgovara dužinama dijelova dekorativne trake.

4. Podijeli u datoj razmjeri:
   a) 780 kg u razmjeri 2 : 7 : 4, b) 2520 m u razmjeri 5 : 8 : 7,
   c) 3600 h u razmjeri 2 : 8 : 5 : 3, č) 680 denara u razmjeri 8 : 3 : 2 : 4.

5. Unutrašnji uglovi trougla su u razmjeri 4 : 3 : 5. Izračunaj veličinu unutrašnjih uglova trougla.

6. Mersiha, Edže i Tea žive u iznajmljenom stanu. One dijele stanarinu u razmjeri 1 : 2 : 2, adekvatno veličini soba. Ukupna kirija iznosi 16200 denara mjesečno. Koliki iznos treba da plati svaka od njih?

7. U jednoj školi postoje četiri sekcije: literarna (l), matematička (m), informatička (i) i sportska (s). U matematičkoj sekciji ima dvostruko više učenika nego u literarnoj sekciji. U informatičkoj sekciji ima pet puta više učenika nego u matematičkoj.
   Broj učenika u informatičkoj sekciji je upola manji od broja članova u sportskoj sekciji. Svaki učenik može biti član najviše jedne sekcije.
   a) Napišite razmjeru l : m : i : s.
   b) Koliko učenika ima u svakoj sekciji, ako u njima ima ukupno 132 učenika.
   Uputstvo: Označi broj učenika u literarnoj sekciji sa *x*, a zatim izrazi broj učenika u svakoj od ostalih sekcija sa x.

8. Učenici Duško, Maksim i Marija podijelili su novac koji su zaradili u odnosu 3 : 4 : 5, ravnomjerno. Duško je dobio 4500 denara. Koliko su denara dobili Maksim i Marija? Koliki je ukupan iznos koji su učenici zaradili?

Istraživanje

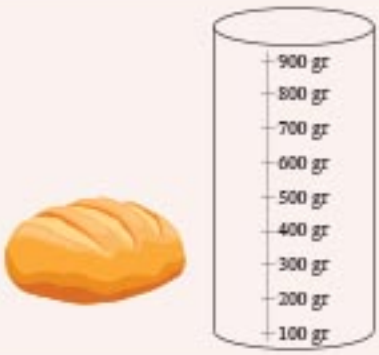
Suma koju su imali Amira, Boban i Kalina bila je u razmjeri 6 : 5 : 4, srazmjerno. Kada je jedna djevojčica posudila 20 denara Bobanu, sume su bile u razmjeri 5 : 6 : 4.
a) Koliko novca je imao svako od njih prije posuđivanja?
b) Da li je moguće da je Karolina posudila novac od Bobana? Obrazloži odgovor.

11. PROPORCIONALNE VELIČINE

Direktno proporcionalne veličine

Активност

Za pripremu 3 vekne hljeba pekar je potrošio 720 g brašna.
a) Koliko brašna će mu biti potrebno za 6 vekni hljeba, a koliko za 9 vekni hljeba?
b) Kako se mijenja potrebna količina brašna povećanjem broja vekni hljeba, a kako smanjenjem broja vekni hljeba?



Za dvije veličine kažemo da su **direktno proporcionalne** ako se povećanjem jedne veličine povećava i druga veličina u istom odnosu.

Drugim riječima, dvije veličine su direktno proporcionalne ako se jedna veličina poveća za isto onoliko puta za koliko se poveća i druga veličina, odnosno koliko puta se umanjuje jedna veličina toliko puta se umanjuje i druga veličina.

Primjer 1

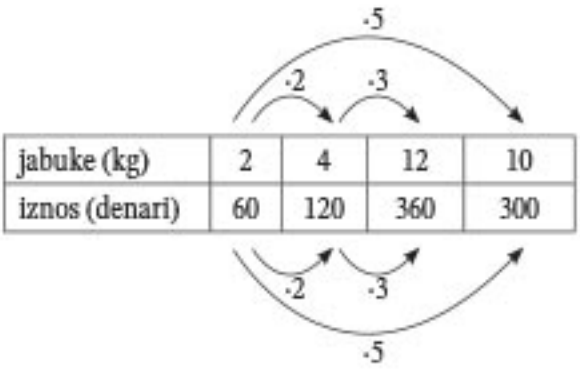
Dvije sveske koštaju 160 denara.
a) Ako kupimo tri puta više svesaka, koliko novca ćemo potrošiti?
b) Kakva je veza između količine, broja svesaka i novca koji moramo platiti za sveske?

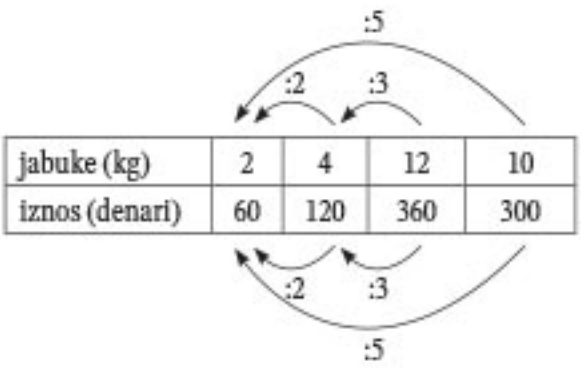
a) Ako kupimo tri puta više svesaka, platit ćemo tri puta više.
Tri puta više svesaka je 6 svesaka. Platit ćemo tri puta više za njih, to jest,

$3 \cdot 160 = 480$ denara.

b) Broj svesaka i novac koji moramo platiti za sveske su direktno proporcionalne veličine, jer se povećanjem jedne količine druga količina također povećava u istoj razmjeri.

U tabelama je količina kupljenih jabuka data u kilogramima, a iznos koji moramo platiti za količinu kupljenih jabuka izražen je u denarima.



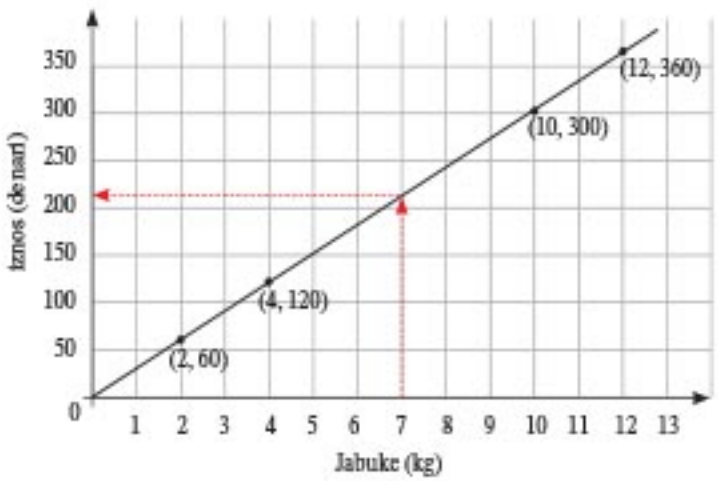


Količina kupljenih jabuka i cijena jabuka su direktno proporcionalne veličine.

Da zabilježimo da su odgovarajući količnici iznosa novca koji moramo platiti i količine kupljenih jabuka

$60 : 2 = 120 : 4 = 360 : 12 = 30,$

uvijek isti broj koji određuje cijenu kilograma jabuka. Ako dobijene vrijednosti ucrtamo kao tačke u koordinatnoj ravni (crtež 1), dobit ćemo **pravu kroz koordinatni početak.**



crtež 1

U našem primjeru imamo samo veličine koje nisu negativne. Stoga je grafikon poluprava koja počinje u koordinatnom početku.
Uz pomoć tabele ili grafikona možemo izračunati i vrijednosti koje nisu prikazane njima.

Prema tabeli možemo izračunati da:

za 510 denara možemo kupiti $510 : 30 = 17$ kg jabuka, ili
za 17 kg jabuka treba platiti $17 \cdot 30 = 510$ denara.

Iz grafikona možemo zaključiti da:

za 7 kg jabuka treba platiti 210 denara, ili
za 210 denara možemo kupiti 7 kg jabuka.

Primjer 2

Ako 3 kg avokada košta 810 denara, koliko će denara koštati 7 kg avokada?

Ako 3 kg avokada košta 810 denara, možemo izračunati da:
1 kg avokada košta $810 : 3 = 270$ denara,
7 kg avokada koštat će $7 \cdot 270 = 1890$ denara.

Zadatak 1

Lindita za 15 min pješice pređe 1 km. Koliko kilometara će preći za: a) 1 h, b) 2,5 h?

Primjer 3

Za bojenje zida od 3 m^2 u zeleno potrebno nam je 600 ml žute i 21 ml plave boje.
a) Koliko mililitara svake boje nam je potrebno da bismo ofarbali zid od 12 m^2?
b) Koliko kvadratnih metara može da se ofarba sa 0,828 *l* zelene boje?

a) Ako nam je za 3 m^2 zida zelene boje potrebno 600 ml žute boje i 21 ml plave boje, onda će nam za 12 m2 biti potrebno

$4 \cdot 600 = 2\,400$ ml žute boje i $4 \cdot 21 = 84$ ml plave boje.

b) Ako nam je za za 3 m2 zida u zelenoj boji potrebno 600 ml žute boje i 21 ml plave boje, tada će nam za 1 m2 zida biti potrebno

$600 : 3 = 200$ ml žute boje i $21 : 3 = 7$ ml plave boje.

Sa 207 ml = 0,207 *l* zelene boje može da se ofarba 1 m2. Jer je $0{,}828 : 0{,}207 = 4$ zaključujemo da sa 0,828 *l* zelene boje možemo da ofarbamo 4 m^2.

Zadatak 2

Krojač Emin sašije 4 odijela za 16 dana.
a) Koliko dana će mu trebati da sašije 12 odijela?
b) Koliko odijela će sašiti za 64 dana?

Обратнопропорционални величини

Активност

U jednoj školi ima ukupno 36 učenika u osmim razredima. Oni hoće da idu na ekskurziju i potrebno je da se iznajmi autobus. Uprava škole odlučila se za firmu koja nudi dnevni zakup autobusa za 36.000 denara. Koliko bi koštalo iznajmljivanje autobusa po učeniku ako bi svi išli na ekskurziju? Da li će se cijena iznajmljivanja po učeniku smanjiti ili povećati ukoliko 12 od ukupnog broja djece ne ide na ekskurziju?

Za dvije veličine kažemo da su **obrnuto proporcionalne** ako se povećanjem jedne veličine uzrokuje smanjenje druge veličine u istoj proporciji.

Drugim riječima, dvije veličine su obrnuto proporcionalne ako je broj puta koliko se jedna veličina poveća jednak broju puta koliko se druga veličina umanji, tj. broj puta koliko se jedna veličina umanjuje jednak je broju puta koliko se druga veličina poveća.

Primjer 4

Izviđači treba da donesu 10 malih balvana u svoj kamp.

a) Ako se više izviđača prijavi za zadatak, da li će svaki izviđač donijeti više ili manje balvana?

b) Ako se manje izviđača prijavi za zadatak, da li će svaki izviđač donijeti više ili manje balvana u kamp?

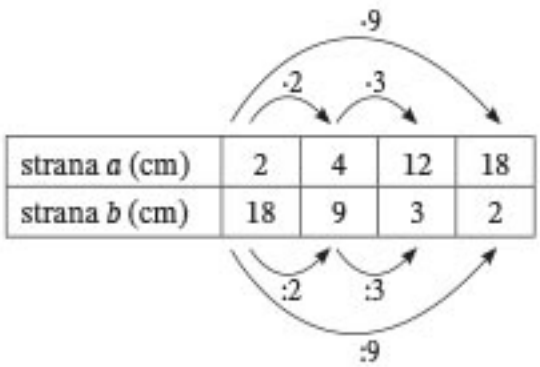
c) Da li je broj izviđača obrnuto proporcionalan broju balvana koje će nositi?

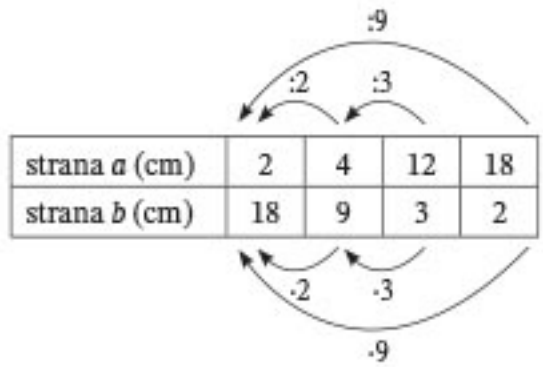
a) Ako se više izviđača prijavi za zadatak, svaki će donijeti manji broj balvana.

b) Ako se manje izviđača prijavi za zadatak, svaki izviđač će donijeti više balvana.

c) Broj izviđača i broj balvana po izviđaču su obrnuto proporcionalne veličine.

U tabelama su date dužine stranica a i b u centimetrima, nekoliko pravougaonika površine 36 cm².





Koliko puta se jedna stranica smanji, druga stranica se poveća i obratno, a površina ostaje nepromijenjena. Odgovarajući proizvodi

$2 \cdot 18 = 4 \cdot 9 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2 = 36,$

uvijek daju površinu pravougaonika.

Pomoću tabele, možemo izračunati dužine stranica a i b, za vrijednosti koje nisu prikazane u njoj:

ako je dužina stranice a 9 cm, onda dužina stranice b iznosi $36 : 9 = 4$ cm, ili
ako je dužina stranice b 4 cm, onda dužina stranice a iznosi $36 : 4 = 9$ cm

Primjer 5

Ako 24 radnika obave posao za 16 dana, za koliko dana će obaviti posao:
a) 6 radnika, b) 48 radnika?

a) 6 radnika je 4 puta manje radnika. Oni će obaviti posao za 4 puta više dana:

$4 \cdot 16 = 64$ dana.

b) 48 radnika je 2 puta više radnika, tako da će oni obaviti posao za 2 puta manje dana:

$16 : 2 = 8$ dana.

Uoči da je $24 \cdot 16 = 6 \cdot 64 = 48 \cdot 8 = 384$.

Zadatak 3

Kofa vode od 2 *l* napuni se jednom flašom za 60 sekundi.
Koliko je vremena potrebno da se kanta napuni ako se puni:
a) iz dvije flaše istovremeno, b) iz tri flaše istovremeno?

Primjer 6

Za popločavanje terase potrebno je 80 pločica površine 30 cm^2.
Koliko pločica je potrebno da bi se popločala terasa pločicama površine 25 cm^2?

Površina terase je $80 \cdot 30 = 2\,400$ cm^2. Za popločavanje terase pločicama površine 25 cm^2, potrebno je $2\,400 : 25 = 96$ pločica površine 25 cm^2.

Zadatak 4

Dvije kompanije za čišćenje stanova i kancelarija oglašavaju se na istom oglasnom prostoru. Kompanija „Čisto“ kaže da 4 njihova radnika mogu očistiti stan za 5 sati, a kompanija „Brzo“ kaže da 6 njihovih radnika može očistiti isti stan za 4 sata. Pod pretpostavkom da će stan biti podjednako čist, koja je kompanija efikasnija?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koje od sljedećih veličina su direktno proporcionalne:
   a) Broj kiflica i brašno upotrijebljeno za pravljenje kiflica?
   b) Brzina automobila i vrijeme potrebno da bi se prešla određena udaljenost?
   c) Broj dječaka koji dijele određenu količinu novca i iznos koji će svaki dječak dobiti?
   č) Iznos koji plaćamo za sladoled i broj kugli koje možemo dobiti za tu sumu?

2. Ekrem trči 100 m za 20 s.
   a) Ako trči istim tempom, koliko mu je vremena potrebno da pretrči: 200 m, 300 m i 400 m?
   b) Napravi tabelu u koju ćeš unijeti date i dobijene vrijednosti za dužinu staze i vrijeme trčanja.
   c) Nacrtaj grafikon koji ilustruje zavisnost vremena trčanja od dužine staze.
   č) Prema tabeli i grafikonu, odredi koliko metara će pretrčati za 30 s?

3. Automobil potroši 25 *l* goriva da bi prešao 355 km. Koliko daleko može preći automobil sa 42 *l* goriva?

4. Da bi se ofarbao zid površine 42m2, potrebno je 6 *l* boje.
   Koliko litara boje je potrebno za 63 m2 ?

5. Na bočici tečnog đubriva za cvijeće piše da se 20 ml đubriva dodaje na 10 *l* vode.
   a) Zapiši razmjeru đubriva i vode,
   b) Bakina kanta za zalijevanje sadrži 4 litra. Koliko mililitara đubriva baka Zora treba da stavi u kantu za zalijevanje?

6. Koje od sljedećih veličina su direktno proporcionalne, a koje obrnuto proporcionalne:
   a) Broj radnika i vrijeme koje provode obavljajući određeni posao?
   b) Cijena robe i količina robe koja se može kupiti za određenu sumu?
   c) Dužine stranica pravougaonika površine 1 cm^2?

7. a) Nacrtaj i popuni tabelu, ako su veličine x i y obrnuto proporcionalne:

x	1	2	3	4
y		6		

   b) Prema tabeli, odredi odgovarajuću vrijednost x za $y = 1$.

8. Jedna boca puni rezervoar medicinskim kisikom za 50 minuta pri istom protoku.
   Koliko je vremena potrebno da bi se rezervoar napunio:
   a) sa 2 boce, b) sa 5 boca, c) sa 10 boca?

9. Roditelji kupuju pločice za kuhinju. Ako uzmu kvadratne pločice sa stranicom 50 cm, bit će im potrebno 36 pločica. Majka preferira manje pločice, također kvadratne, ali sa stranicom 30 cm.
   a) Koliko komada manjih pločica će im biti potrebno?
   b) Ako veće pločice koštaju 70 denara po komadu, a manje 30 denara po komadu, za koje pločice će platiti više?

10. **Projektni zadatak**
    Koristeći proporcionalne i obrnuto proporcionalne odnose, razumjet ćeš primjenu matematike u prirodnim naukama.
    1) Biologiji
    Izmjeri broj otkucaja tvog srca (na zglobu ili na vratu) nakon 10 s, 30 s i 60 s.
    a) Kako broj otkucaja srca zavisi od vremena mjerenja?
    b) Napravi tabelu i nacrtaj grafik zavisnosti broja otkucaja srca od vremena mjerenja.
    c) Prema grafiku, odredi koliki je broj otkucaja srca nakon 120 s.

2) Geografije

Izaberi jednu lokaciju. U tri različita vremena (na primjer, u 10h, u 11h i u 12h) izmjeri vrijeme dok ne prođe tačno 30 pješaka. Zatim, izračunaj protok pješaka (količnik od 30 i vremena koje je bilo potrebno da prođe 30 pješaka).

a) Kolika je zavisnost vremena od protoka pješaka, direktno proporcionalna ili obrnuto proporcionalna?

b) Napravi tabelu zavisnosti vremena od protoka pješaka.

c) Prema tabeli, odredite za koliko minuta će biti potrebno da prođe 30 pješaka, ako je protok 12 pješaka u minuti?

3) Fizike

Izaberi tri staze u tvom školskom dvorištu. Izmjeri njihovu dužinu i vrijeme koje ti je potrebno da bi prešao svaku stazu istom brzinom.

a) Kolika je zavisnost vremena od dužine staze, ako se krećeš istom brzinom?

b) Napravi tabelu i nacrtaj grafik zavisnosti vremena od dužine staze.

c) Prema grafiku odredi koliko će ti vremena trebati da bi prešao stazu dužine 20 metara.

4) Hemije

Napuni dvije čaše sa 100 ml i 300 ml vode. Redom u svaku čašu stavi zrno grožđa i dodaji po pola kašičice soli i miješaj sve dok grožđe ne ispliva na površinu.

Zapiši koliko soli si dodao u svaku čašu.

a) Kolika je zavisnost količine dodate soli od količine vode?

b) Napravi tabelu i nacrtaj grafik zavisnosti količine dodate soli od količine vode.

c) Prema grafiku odredi koju količinu soli treba dodati u 400 ml vode da bi grožđe isplivalo na površinu?

12. SABIRANJE I ODUZIMANJE RACIONALNIH BROJEVA

Sabiranje racionalnih brojeva

Aktivnost

Jedan biciklist je za jedan sat prešao $\frac{3}{4}$ staze, a drugog sata je prešao $\frac{1}{6}$ staze.

Da bi izračunao koliki dio staze je prešao biciklist za 2 h, zapiši izraze sa razlomcima koji odgovaraju obojenim dijelovima na crtežu.



crtež 1

Objasni korake kojima si izračunao dio staze koju je biciklist prešao za 2 h.

Skeniraj kod i podsjeti se kako se sabiraju razlomci.

Primjer 1

Izračunaj zbir racionalnih brojeva: a) $\frac{2}{5}$ i $\frac{-4}{5}$, b) $\frac{5}{6}$ i $\frac{-3}{8}$.

a) Racionalni brojevi su razlomci sa istim imeniocima:

$$\frac{2}{5}+\frac{-4}{5}=\frac{2+(-4)}{5}=\frac{-2}{5}.$$

Zbir brojilaca razlomaka zapisujemo kao brojilac zbira razlomaka, a imenilac je jednak imeniocima razlomaka.

b) Racionalni brojevi su razlomci sa različitim imeniocima:

$$\frac{5}{6}+\frac{-3}{8}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{(-3)\cdot 3}{8\cdot 3}$$

NZS (6, 8) = 24, 24 : 6 = 4, 24 : 8 = 3.

$$=\frac{20}{24}+\frac{-9}{24}=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{11}{24}$$

Razlomke skraćujemo na razlomke sa istim imeniocima, a zatim ih sabiramo kao razlomke sa jednakim imeniocima.

- **Razlomci sa istim imeniocima sabiraju se** tako što se zbir brojilaca zapiše kao brojilac zbira razlomaka, a imenilac je jednak imeniocima razlomaka.
- **Razlomci sa različitim imeniocima sabiraju se** tako što se prvo svode na iste imenioce, a zatim se sabiraju kao razlomci sa istim imeniocima.

Primjer 2

Izračunaj zbir racionalnih brojeva: a) $-3\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$, b) $-7{,}5$ i $3{,}67$.

a) $-3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 1}{4\cdot 1}=$

$=\frac{-14}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-14+1}{4}=\frac{-13}{4}=-3\frac{1}{4}$

Mješovite brojeve zapisujemo kao nepravilne razlomke.

b) $-7{,}5+3{,}67=\frac{-75}{10}+\frac{367}{100}=\frac{-75\cdot 10}{10\cdot 10}+\frac{367}{100}$

$=\frac{-750}{100}+\frac{367}{100}=\frac{-750+367}{100}=-3\frac{83}{100}$.

Decimalne brojeve zapisujemo kao decimalne razlomke.

Zadatak 1

Izračunaj: a) $\frac{4}{9}+\frac{-5}{12}$, b) $\frac{-3}{5}+\frac{-7}{15}$, c) $\frac{-10}{11}+2\frac{7}{10}$, č) $-0{,}54+(-8{,}8)$.

Zadatak 2

Ronilac je bio na dubini od 12,5 m ispod površine mora. Zatim se popeo na $2\frac{3}{5}$ m.

a) Na kojoj dubini je bio ronilac?

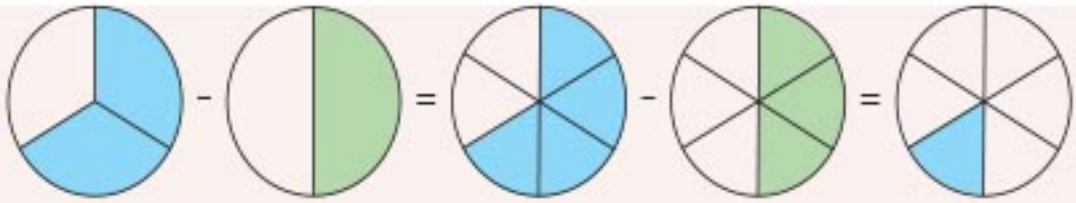
b) Da li je bliže ili dalje od površine mora?

Oduzimanje racionalnih brojeva

Aktivnost

Stolar Besim je isjekao komad dužine $\frac{2}{3}$ m od daske dužine $\frac{1}{2}$ m.

Da bi izračunao koliko mu je daske ostalo, napiši izraze sa razlomcima koji odgovaraju obojenim dijelovima na crtežu 2.



crtež 2

Primjer 3

Izračunaj razliku: a) $\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}$, b) $\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}$.

a) Racionalni brojevi su razlomci sa istim imeniocem.

$\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{-3-2}{7}=\frac{-5}{7}$

Razliku brojilaca u nizu zapisujemo kao brojilac razlomka - razlike, a imenilac je jednak sa imeniocima razlomaka.

b) Racionalni brojevi su razlomci sa različitim imeniocima:

$\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{-3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}$ NZS (8, 6) = 24, 24 : 8 = 3, 24 : 6 = 4.

$=\frac{-9}{24}-\frac{20}{24}=\frac{-9-20}{24}=\frac{-29}{24}=-1\frac{5}{24}$.

Razlomci se svode na razlomke sa istim imeniocima, a zatim se oduzimaju kao razlomci sa istim imeniocima.

- **Razlomci sa istim imeniocima oduzimaju se** tako što se razlika brojilaca po redoslijedu zapiše kao brojilac razlomka-razlike, a imenilac je jednak sa imeniocima razlomaka.
- **Razlomci sa različitim imeniocima oduzimaju se** tako što se razlomci prvo svode na razlomke sa istim imeniocima, a zatim se oduzimaju kao razlomci sa jednakim imeniocima.

Primjer 4

Izračunaj razliku: a) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$, b) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}$, c) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}$, č) $-2{,}5-3{,}75$.

a) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{33}{12}-\frac{4}{12}=\frac{33-4}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$,

b) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}=\frac{-3\cdot 9}{5\cdot 9}-\frac{-4\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{-27}{45}-\frac{-20}{45}=\frac{-27-(-20)}{45}=\frac{-7}{45}=-\frac{7}{45}$,

c) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}=\frac{-9}{4}-\frac{12}{7}=\frac{-9\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{-12\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{-63}{28}-\frac{-48}{28}=\frac{-63-(-48)}{28}=\frac{-15}{28}=-1\frac{11}{28}$,

č) $-2{,}5-3{,}75=\frac{-25}{10}-\frac{375}{100}=\frac{-25\cdot 10}{10\cdot 10}-\frac{375}{100}=\frac{-250-375}{100}=\frac{-625}{100}=\frac{-25}{4}=-6\frac{1}{4}$.

Zadatak 3

Izračunaj: a) $\frac{7}{16}-\frac{-5}{12}$, b) $\frac{-8}{15}-\frac{-6}{21}$, c) $-1\frac{5}{7}-3\frac{3}{4}$, č) $-12{,}54-15{,}2$.

Zadatak 4

Jednog zimskog dana, temperatura ujutro u Berovu bila je $-\frac{5}{2}$ °C.
Do podne temperatura se popela za $3\frac{1}{4}$ °C. Popodne se opet smanjila za 2,6 °C.

a) Kolika je bila temperatura u podne?
b) Kolika je bila temperatura poslije podne?
c) Da li je popodnevna temperatura viša ili niža od jutarnje temperature i za koliko stepeni?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj: a) $\frac{-1}{6}+\frac{-3}{8}$, b) $-13\frac{2}{3}+10\frac{1}{4}$, c) $-17+1\frac{5}{6}$, č) $-1{,}55+0{,}7$.
2. Izračunaj: a) $\frac{1}{5}-\frac{3}{8}$, b) $-1\frac{2}{7}-\frac{1}{9}$, c) $-1-1\frac{5}{7}$, č) $-0{,}17-1{,}325$.
3. Ana i Erol su otišli u prodavnicu da kupe voće. Ana je kupila $\frac{3}{4}$ kg jabuka, $\frac{2}{3}$ kg krušaka. Erol je kupio 2,4 kg narandži i 1,35 kg mandarina.
   a) Koliko kilograma voća je kupila Ana?
   b) Koliko kilograma voća je kupio Erol?
   c) Ko je kupio više voća i za koliko kilograma?
4. U velikoj čaši bilo je 2,5 *l* vode. $\frac{2}{5}$ *l* je isparilo zagrijavanjem, a zatim je dodato 1,1 *l* svježe vode. Kolika je ukupna količina vode u čaši?
5. Temperatura rastvora bila je -2,3 °C. Zatim se povećala za $5\frac{3}{5}$ °C, a zatim smanjila za 3,2 °C. Kolika je temperatura nakon promjena?
6. Biljka je početno visoka $8\frac{2}{5}$ cm. Tokom jedne sedmice je porasla za 2,3 cm, a zatim se dio stabljike skratio za 0,9 cm zbog slabog rasta. Koliko je biljka sada visoka? Koliko joj je potrebno da poraste da bi dostigla visinu od 12 cm?
7. Marina miješa čaj u bokalu. Na početku je bilo $1\frac{4}{5}$ *l* čaja. 0,4 *l* je isparilo tokom zagrijavanja, a zatim je dodala 0,75 *l* svježeg čaja.
   a) Kolika je ukupna količina čaja nakon svih promjena?
   b) Ako želi da popije 3 *l* čaja, koliko još litara treba da doda?
8. Jovana ima negativan saldo od 450 denara. Uplatila je $31\frac{1}{4}$ denara na svoj račun.
   a) Koliko će biti stanje na računu?
   b) Ako potroši još 125,75 denara, koliko će biti konačno stanje na računu?

9. Elena je odigrala tri seta tenisa tokom vikenda. U prvom setu je imala lošiji rezultat za $1\frac{1}{5}$ poena od svoje protivnice. U drugom setu je osvojila 2,3 poena više od svoje protivnice. U trećem setu je imala lošiji rezultat za $1\frac{1}{5}$ poena u odnosu na svoju protivnicu.

a) Koliki je Elenin ukupan rezultat u odnosu na njenu protivnicu poslije sva tri seta?
b) Da li je ukupno osvojila više ili manje poena od svoje protivnice?

Istraživanje

Ako ispuniš zahtjeve u istraživanju, naučit ćeš da sabiraš i oduzimaš racionalne brojeve u decimalnom obliku, bez pretvaranja decimalnih brojeva u decimalne razlomke.

a) Poznato ti je da se pri sabiranju cijelih brojeva primjenjuje sljedeće pravilo:

- **Zbir dva cijela broja sa istim znacima** je cijeli broj čija je apsolutna vrijednost zbir apsolutnih vrijednosti dva broja (kao zbir prirodnih brojeva), sa istim znakom kao i znaci sabiraka.
- **Zbir dva različita broja sa različitim znacima** je cijeli broj čija je apsolutna vrijednost jednaka razlici veće i manje apsolutne vrijednosti ta dva broja, a njegov znak je jednak znaku broja sa većom apsolutnom vrijednošću.
- **Razlika dva cijela broja** dobija se kada se umanjenik doda suprotnom broju od umanjitelja.

Slično kao i kod cijelih brojeva, možemo definisati **apsolutnu vrijednost racionalnog broja** x na sljedeći način:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \text{ pozitivan racionalan broj} \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \\ -x, & \text{ako je } x \text{ negativan racionalan broj} \end{cases}$$

Prateći pravilo za sabiranje i oduzimanje cijelih brojeva, izvedi pravilo sabiranja racionalnih brojeva u decimalnom obliku.

b) Koristeći pravilo, izračunaj: $1{,}2 + 0{,}5$; $-1{,}2 + (-0{,}5)$; $-1{,}2 + 0{,}5$; $1{,}2 + (-0{,}5)$.

Skeniraj kodove i riješi zadatke.

Sabiranje cijelih brojeva

Oduzimanje cijelih brojeva

Oduzimanje decimalnih brojeva

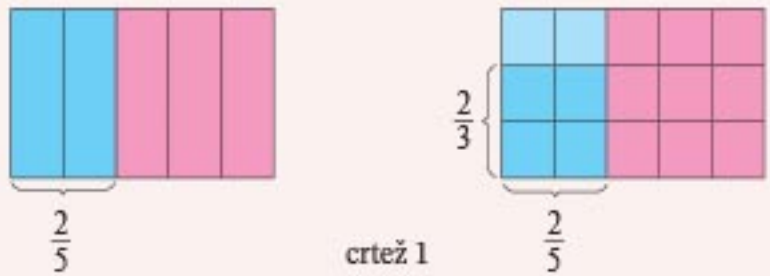
13. MNOŽENJE I DIJELJENJE RACIONALNIH BROJEVA

Množenje racionalnih brojeva

Aktivnost

Demir je napravio $\frac{2}{5}$ svojih slika i otišao kod svog prijatelja Mihaila.
Od slika koje je napravio, Demir je dao Mihailu $\frac{2}{3}$ (crtež 1).

a) Koji dio slika je Demir dao Mihailu?
b) Koju operaciju si koristio da bi izračunao?



crtež 1

Skeniraj kod i podsjeti se kako se množe razlomci.

Primjer 1

Izračunaj proizvod racionalnih brojeva: a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{7}$, b) $\frac{-2}{3}$ i $\frac{5}{7}$.

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{10}{21}$, b) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot5}{3\cdot7}=\frac{-10}{21}$.

Proizvod razlomaka je razlomak čiji je brojilac jednak proizvodu brojilaca činilaca, a imenilac je proizvod imenilaca činilaca.

Primjer 2

Izračunaj proizvod $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}$.

Prvi način: $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}=\frac{-10\cdot14}{21\cdot25}=\frac{-140}{525}=\frac{-28}{105}=\frac{-4}{15}$. Računamo, pa kratimo.

Drugi način: $\frac{-\cancel{10}}{\cancel{21}} \cdot \frac{\cancel{14}}{\cancel{25}} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{-4}{15}$. Kratimo, pa računamo.

Primjer 3

Izračunaj proizvod: a) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3}$, b) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7)$.

a) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{-49}{15} = -3\frac{4}{15}$,

b) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7) = \frac{-24}{10} \cdot \frac{-17}{10} = \frac{-24 \cdot (-17)}{10 \cdot 10} = \frac{408}{100} = \frac{102}{25} = 4\frac{2}{25}$.

Zadatak 1

Izračunaj proizvod: a) $\frac{-105}{72} \cdot \frac{18}{15}$, b) $1\frac{8}{11} \cdot \frac{-33}{45}$, c) $\frac{-7}{17} \cdot \frac{-1}{10}$, č) $-0{,}4 \cdot 1{,}5$.

Primjer 4

Temperatura u frižideru bila je 2,5 °C. Zatim se povećala 1,4 puta u odnosu na početnu temperaturu.

a) Za koliko stepeni Celzijusa se povećala temperatura u frižideru?

b) Kolika je bila nova temperatura u frižideru?

a) Temperatura se povećala za: $2{,}5 \cdot 1{,}4 = \frac{25}{10} \cdot \frac{14}{10} = \frac{350}{100} = 3{,}5$ °C.

b) Nova temperatura u frižideru iznosila je: $2{,}5 + 3{,}5 = \frac{25}{10} + \frac{35}{10} = \frac{60}{10} = 6$ °C.

Zadatak 2

Jovana ima uštedevinu od 312,5 denara. Ona odlučuje da je poveća za $1\frac{2}{3}$ puta, a da zatim potroši $\frac{3}{4}$ od nove sume za kupovinu knjiga.

Koliko denara će ostati Jovani poslije kupovine knjiga.

Dijeljenje racionalnih brojeva

Aktivnost

Tri litra vode treba podijeliti u boce od pola litra.

a) Koliko boca će biti potrebno?

b) Koju operaciju ćeš koristiti da bi izračunao?

Skeniraj kod i prisjeti se kako se dijele cijeli brojevi.

Primjer 5

Izračunaj proizvod: a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$, b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}$. Šta primjećuješ?

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot4}{4\cdot3}=\frac{12}{12}=1$, b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot5}{5\cdot3}=\frac{15}{15}=1$.

Sigurno ste uočili da je brojilac prvog razlomka jednak imeniocu drugog razlomka, a imenilac prvog razlomka jednak je brojiocu drugog razlomka.
Takve razlomke nazivamo **recipročnim razlomcima.**

Primjer 6

Izračunaj količnik: a) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}$, b) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}$, c) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}$.

a) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{7}=\frac{3\cdot11}{4\cdot7}=\frac{33}{28}=1\frac{5}{28}$ Recipročni razlomak razlomka $\frac{7}{11}$ je razlomak $\frac{11}{7}$.

b) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}=\frac{-5}{9}\cdot\frac{4}{3}=\frac{-5\cdot4}{9\cdot3}=\frac{-20}{27}$ Recipročni razlomak razlomka $\frac{3}{4}$ je razlomak $\frac{4}{3}$.

c) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}=\frac{-12}{21}\cdot\frac{-7}{2}=\frac{-6\cdot(-1)}{3\cdot1}=2$ Recipročni razlomak razlomka $\frac{2}{-7}$ je razlomak $\frac{-7}{2}$.

Količnik dva razlomka jednak je proizvodu djeljenika i recipročne vrijednosti djelioca.

Primjer 7

Izračunaj količnik: a) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}$, b) $-1{,}2:(-2{,}3)$.

a) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}=-\frac{28}{27}:\frac{20}{9}=\frac{-28}{27}\cdot\frac{9}{20}=\frac{-7}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{-7\cdot1}{3\cdot5}=\frac{-7}{15}$

b) $-1{,}2:(-2{,}3)=\frac{-12}{10}:\frac{-23}{10}=\frac{-12}{10}\cdot\frac{-10}{23}=\frac{12}{23}$

Zadatak 3

Izračunaj količnik:

a) $\frac{-8}{5}:\frac{2}{3}$, b) $\frac{18}{25}:\frac{-72}{75}$, c) $\frac{-125}{64}:\frac{-50}{16}$.

Skeniraj kod i podijeli razlomke.

Primjer 8

Antonija hoće da napravi sok za svoje prijatelje. Jedna flaša koncentrata soka sadrži 0,7 *l*. Koliko flaša koncentrata soka joj je potrebno da napravi 3,5 *l* soka?

Broj potrebnih flaša iznosi:

$$3{,}5 : 0{,}7 = \frac{35}{10} : \frac{7}{10} = \frac{\cancel{35}}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{7}} = 5.$$

Antoniji je potrebno 5 flaša koncentrata za sok.

Zadatak 4

Kompanija koja izvozi na strano tržište ima dug od 825,75 eura. Da bi ga smanjilo, rukovodstvo planira da otplati dug u 15 jednakih rata. Nakon otplate prve rate, kompanija ostvaruje profit od 312,50 eura. Koliki će biti dug kompanije nakon plaćanja prve rate i dodavanja profita?

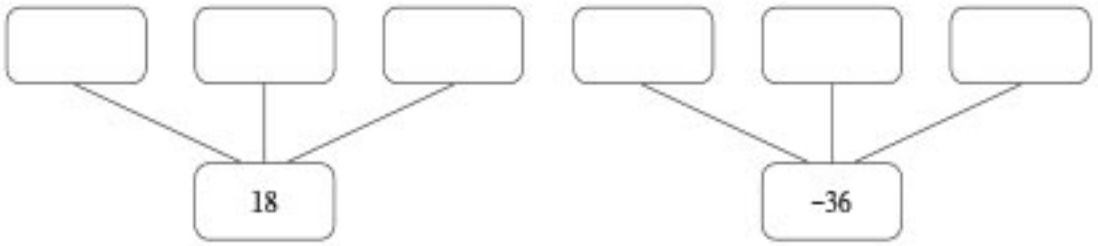
Napomena: U skupu racionalnih brojeva, dijeljenje je uvijek moguće, osim kada je djelilac 0. Zapamti, **dijeljenje nulom nije moguće.**

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj proizvod: a) $-15 \cdot \frac{-8}{5}$, b) $-\frac{5}{2} \cdot \frac{-7}{5}$, c) $-8\frac{1}{2} \cdot 36$, č) $(-0{,}5) \cdot (-0{,}12)$.

2. Izračunaj količnik: a) $12 : \frac{-8}{9}$, b) $5\frac{1}{3} : \left(-5\frac{1}{3}\right)$, c) $3{,}4 : \left(-1\frac{7}{10}\right)$, č) $-230 : 2{,}3$.

3. Precrtaj dijagrame na crtežu 2 u svoju svesku. U prazna mjesta napiši predstavu datog broja koristeći sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje racionalnih brojeva.



crtež 2

4. Najniža temperatura ikada zabilježena u nekoj oblasti je −18,4 °C. Zbog klimatskih promjena, porasla je 1,6 puta u odnosu na početnu temperaturu. Kasnije tokom toplotnog talasa, porasla je za 12,5 °C. Koliko iznosi nova temperatura?

5. U učionici za fiziku, Teuta stavlja dva termometra u dva različita frižidera za eksperiment. Frižider A ima temperaturu od −3,2 °C, a frižider B ima temperaturu od 2,5 °C. Ona odlučuje da postigne temperaturu u frižideru A koja je 1,5 puta veća od prvobitne temperature, a temperaturu u frižideru B koja je 2,4 puta veća od prvobitne temperature.
   a) Kolika će biti nova temperatura u frižideru A?
   b) Kolika će biti nova temperatura u frižideru B?

6. Račun A je u minusu −4,5 hiljada denara. Banka obračunava kamatu i saldo je podijeljen sa 0,5.
   Račun B je u plusu 7,2 hiljade denara, ali ga troškovi smanjuju za 1,8 puta (dijeli se sa 1,8).
   a) Koliko je novo stanje na računu A?
   b) Koliko je novo stanje na računu B?
   c) Ako se dva računa spoje u novi račun, da li će stanje biti pozitivno ili negativno?

7. Tim treba da postavi 1177,5 m optičkog kabla duž ulice. Plan je da se kabl postavi na 15 jednakih dionica. Poslije postavljanja kabla na prvoj dionici, stigao je drugi tim i odmah postavio 312,5 m kabla.
   a) Kolika je dužina jedne dionice?
   b) Koliko kabla je ostalo da se postavi poslije prve dionice prije nego što se drugi tim uključio?
   c) Koliko kabla je ostalo da se postavi nakon uključivanja drugog tima?

8. U laboratorijskom eksperimentu korišteno je 256,5 g rastvora kiseline.
   Količina treba da se podijeli na 12 jednakih uzoraka za učenike.
   a) Koliku masu rastvora kiseline ima svaki uzorak?
   b) Ako je svaki učenik dodao 15,25 g kiseline svom uzorku, kolika će biti ukupna masa uzorka nakon dodavanja?
   c) Kako će se promijeniti koncentracija kiseline u uzorku nakon dodavanja? Objasni svoj odgovor.

Istraživanje

1. a) Prepiši i popuni tabelu u vezi sa znakom proizvoda i količnikom dva racionalna broja a i b.
   b) Da li će tabela biti identična datoj, ako su a i b cijeli brojevi. Zašto?
   c) Šta možeš zaključiti, u kojem slučaju je znak pozitivan, a u kojem slučaju negativan?

a	b	$a \cdot b$	$a : b$
+	+		
+	−		
−	+		
−	−		

2. Ako ispuniš zahtjeve u istraživanju, naučit ćeš da množiš i dijeliš racionalne brojeve u decimalnom obliku, bez pretvaranja decimalnih brojeva u decimalne razlomke.
   a) Poznato nam je da se pri množenju i dijeljenju cijelih brojeva primjenjuje pravilo:
   - **Proizvod** dva cijela broja sa različitim znacima je negativan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka proizvodu apsolutnih vrijednosti tih činilaca.
   - **Proizvod** dva cijela broja sa istim znacima je pozitivan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka proizvodu apsolutnih vrijednosti tih činilaca.
   - **Količnik** (ako postoji) dva cijela broja sa različitim znacima je negativan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka količniku apsolutnih vrijednosti djeljenika i djelioca.

- **Količnik** (ako postoji) od dva cijela broja sa istim znacima je pozitivan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka količniku apsolutnih vrijednosti djeljenika i djelioca.

Slijedeći pravilo množenja i dijeljenja cijelih brojeva, izvedi pravilo za množenje i dijeljenje racionalnih brojeva u decimalnom obliku.

b) Koristeći pravilo, izračunaj:

$1{,}2 \cdot 0{,}5;\ -1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ -1{,}2\ 0{,}5;\ 1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ 1{,}2 : 0{,}5;\ -1{,}2 : (-0{,}5);\ -1{,}2 : 0{,}5;$

14. OSOBINE OPERACIJA SA RACIONALNIM BROJEVIMA

Aktivnost

Izračunaj zbirove:

a) $7 + (-4)$ i $(-4) + 7$,

b) $[12 + (-8)] + 3$ i $12 + [(-8) + 3]$.

Šta primjećuješ? Koja svojstva ima operacija sabiranja cijelih brojeva?

Skeniraj kod i izračunaj zbir.

Primjer 1

Izračunaj zbir: a) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}$ i $\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}$, b) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}$ i $\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)$.

a) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{-3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{-1}{4}$, Sabirci su promijenili mjesta.

$\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{-3}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{-3+2}{4}=\frac{-1}{4}$. Zbir se nije promijenio.

b) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}=\frac{-3+4}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{2-9}{12}=\frac{-7}{12}$, Način grupisanja sabiraka je promijenjen.

$\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{8-9}{12}=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{12}=\frac{-6-1}{12}=\frac{-7}{12}$. Zbir se nije promijenio.

- **Komutativno svojstvo sabiranja**: Zbir dva racionalna broja ne mijenja se ako sabirci zamijene mjesta.
- **Asocijativno svojstvo sabiranja**: Zbir racionalnih brojeva ne zavisi od načina grupisanja sabiraka.

Zadatak 1

Mile je zaronio na -3,7 m nadmorske visine, a zatim se spustio još 2,5 m. Sead je prvo istraživao podvodni svijet na -2,5 m nadmorske visine, a zatim se spustio još 3,7 m. Bez računanja, odredite da li su se Mile i Sead našli na istoj visini?
Objasni svoj odgovor.

Primjer 2

Izračunaj: a) $\frac{-3}{7}+0$, b) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}$.

a) $\frac{-3}{7}+0=\frac{-3}{7}+\frac{0}{7}=\frac{-3+0}{7}=\frac{-3}{7}$, b) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}=\frac{1+(-1)}{6}=\frac{0}{6}=0$.

Razlomci $\frac{1}{6}$ i $\frac{-1}{6}$ su **suprotni** jedan drugom.

Aktivnost

Izračunaj proizvode: a) $40\cdot(-8)$ i $(-8)\cdot 40$, b) $[(-42)\cdot(+5)]\cdot(-8)$ i $(-42)\cdot[(+5)\cdot(-8)]$.
Šta primjećuješ? Koja svojstva ima operacija množenja cijelih brojeva?

Primjer 3

Izračunaj proizvode: a) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}$ i $\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}$, b) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}$ i $\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)$.

a) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{-2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{-6}{35}$, Činioci su promijenili mjesta.

$\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{3\cdot(-2)}{7\cdot 5}=\frac{-6}{35}$. Proizvod se nije promijenio.

b) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1\cdot 1}{3\cdot 4}\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{-\cancel{3}}{5}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{-1}{5}=\frac{-1\cdot(-1)}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$, Način grupisanja činilaca je promijenjen.

$\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1\cdot(-3)}{4\cdot 5}=\frac{-1}{\cancel{3}}\cdot\frac{-\cancel{3}}{20}=\frac{(-1)\cdot(-1)}{20}=\frac{1}{20}$. Proizvod se nije promijenio.

- **Komutativno svojstvo množenja**: Proizvod dva racionalna broja ne mijenja se ako činioci zamijene svoja mjesta.
- **Asocijativno svojstvo množenja**: Proizvod racionalnih brojeva ne zavisi od načina na koji su činioci grupisani.

Primjer 4

Izračunaj proizvod: a) $\frac{-4}{5}\cdot 1$, b) $\frac{-2}{3}\cdot 0$, c) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}$.

a) $\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{4}{5}$, b) $\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{2\cdot 0}{3}=\frac{0}{3}=0$, c) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}=1$.

Razlomci $\frac{-2}{7}$ i $\frac{7}{-2}$ su **recipročni** jedan drugom.

Zbog asocijativnog zakona sabiranja i množenja, možemo da izračunamo zbir ili proizvod konačno mnogo racionalnih brojeva.

Zadatak 2

Izračunaj: a) $2\frac{1}{10}+3\frac{2}{15}+\frac{3}{15}$, b) $\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{3}\cdot 3\frac{2}{4}$, c) $\left(-3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Aktivnost

Meri je odlučila da štedi od svog džeparca, tako da će svakog dana trošiti po 200 denara, što je 300 denara od dnevnog džeparca. Za 7 dana je izračunala da će uštedjeti

$$300\cdot 7-200\cdot 7=(300-200)\cdot 7=100\cdot 7=700 \text{ denara.}$$

Koje svojstvo je Meri primijenila u svom proračunu?

Distributivno svojstvo množenja u odnosu na sabiranje: Pri množenju zbira datim brojem, rezultat je isti bez obzira da li prvo izračunamo zbir, a zatim ga pomnožimo datim brojem, ili ako prvo pomnožimo svaki od zbira datim brojem, a zatim saberemo dobijene proizvode. Distributivno svojstvo množenja važi i za oduzimanje.

Zadatak 3

Provjeri distributivno svojstvo kroz primjer $\left(1{,}2+\frac{3}{5}-7\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Primjenom gore navedenih svojstava operacija sabiranja i oduzimanja u mnogim slučajevima možemo olakšati proračune.

Primjer 5

Izračunaj na najlakši način: a) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}$, b) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4$, c) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64$.

a) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}=7-\frac{10}{3}+9-\frac{17}{3}=7+9-\left(\frac{10}{3}+\frac{17}{3}\right)=16-\frac{27}{3}=16-9=7$,

b) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4=\frac{-25}{10}\cdot 4\cdot\frac{-379}{10}=-10\cdot\frac{-379}{10}=379$,

c) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64=2{,}52\cdot(36+64)=\frac{252}{100}\cdot 100=252$.

Zadatak 4

Tea je kupila 3,5 kg jagoda za 55 denara, 3,5 kg trešanja za 45 denara i 3,5 kg trešanja za 100 denara. Koliko je denara ukupno platila za voće?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Provjeri jednačinu $a+(b+c)=(a+b)+c$ za racionalne brojeve:
   a) $a=-2\frac{3}{4}$, $b=\frac{-2}{7}$ i $c=\frac{4}{5}$, b) $a=\frac{-1}{2}$, $b=1\frac{2}{3}$ i $c=-0{,}6$.

2. Izračunaj $\frac{1}{2}$ od $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{6}$ od $\frac{1}{2}$. Zatim uporedi dobijene rezultate. Šta zaključuješ? Objasni svoj odgovor.

3. Izračunaj pomoću komutativnog i asocijativnog svojstva.
   a) $3\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+4\frac{7}{12}$, b) $\frac{-3}{8}+12\frac{3}{4}-3\frac{5}{8}+2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$, c) $\left(\frac{3}{17}\cdot\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{17}{18}$, d) $\frac{15}{19}\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{38}{45}\right)$.

4. Koji proizvod se dobija, veći od nule, jednak nuli ili manji od nule, ako:
   a) je broj negativnih činilaca paran i nema činioca 0,
   b) je broj negativnih činilaca neparan i nema činioca 0,
   c) je jedan od činilaca nula.

5. Izračunaj proizvode na dva načina: a) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$, b) $\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{14}\right)\cdot 1\frac{3}{4}$.

6. Izračunaj na najlakši način: a) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$, b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}$, c) $\frac{11}{12}\cdot\frac{8}{9}-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$.

7. Bazen je napunjen sa tri cijevi za $3\frac{1}{3}$ h. Prva cijev ispušta $3\frac{1}{5}$ m^3 vode za jedan sat, a druga $1\frac{1}{10}$ m^3 više od prve. Koliko kubnih metara vode može da primi bazen ako treća cijev ispusti isto toliko vode za jedan sat koliko ispuštaju obje cijevi zajedno?

15. BROJEVNI IZRAZI S RACIONALNIM BROJEVIMA

Aktivnost

Izračunaj vrijednost brojevnog izraza:
a) $(-1)\cdot(-10)+5\cdot(-9):(-1)$,
b) $\{20-3\cdot[8+(-4)]\}:[10+2\cdot(-3)]$.
Za svaki izraz objasni redoslijed izvršavanja naznačenih operacija.

Skeniraj kod i riješi zadatke.

Ako brojevni izraz bez zagrada sadrži samo operacije prvog reda, sabiranje i oduzimanje, ili samo operacije drugog reda, množenje i dijeljenje, onda se operacije izvršavaju redoslijedom kojim su zapisane, slijeva nadesno.

Primjer 1

Izračunaj brojnu vrijednost izraza: a) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1$, b) $-6\cdot 2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2$.

a) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1=\frac{19}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-\frac{1}{1}=\frac{19\cdot 6}{8\cdot 6}-\frac{5\cdot 4}{12\cdot 4}+\frac{7\cdot 3}{16\cdot 3}-\frac{1\cdot 48}{1\cdot 48}=$

$=\frac{114-20+21-48}{48}=\frac{67}{48}=1\frac{19}{48}$,

b) $-6\cdot 2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2=-6\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{-3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-6\cdot 5\cdot 4\cdot 1}{2\cdot(-3)\cdot 2}=\frac{-120}{-12}=10$.

Ako se operacije prvog i drugog reda javljaju u brojevnom izrazu bez zagrada, onda prvo izvršavamo operacije drugog reda množenje i dijeljenje, a zatim operacije prvog reda sabiranje i oduzimanje.

Primjer 2

Izračunaj brojnu vrijednost izraza $\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}$.

$\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}=\frac{5}{8}-\frac{\cancel{11}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{15}}{\cancel{11}}=\frac{5}{8}-\frac{5}{2}=\frac{5}{8}-\frac{5\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{5-20}{8}=\frac{-15}{8}=-1\frac{7}{8}$.

Ako brojevni izraz sadrži: male zagrade ( ), srednje zagrade [ ] i velike zagrade { }, onda ćemo prvo izvršiti operacije u malim zagradama, zatim operacije u srednjim zagradama, pa velikim zagradama, i na kraju operacije van njih i sa njima.

Primjer 3

Izračunaj brojnu vrijednost izraza: $\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}$.

$$\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot\frac{7}{3}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\left(\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}\right)\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{5+6}{15}\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7\cdot 5}{15}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2+35-22}{15}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\frac{15}{15}\cdot\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Zadatak 1

Izračunaj brojnu vrijednost izraza $(-3,5)+\frac{2}{3}\cdot(-4,5)-(-\frac{5}{6})+7,2:(-2,4)$.

Primjer 4

Jedan učenik izvodi naučni eksperiment sa rastvorima soli. Ima tri bočice sa različitim količinama rastvora. Prva bočica sadrži 1,2 *l* rastvora, druga sadrži $\frac{3}{4}$ *l*, a treća sadrži 0,6 *l* rastvora. Sipao je polovinu rastvora u prvu bočicu, $\frac{1}{3}$ njene količine u drugu bočicu, a iz treće bočice je sipao 0,2 *l*.
Kolika je količina rastvora preostala u sve tri bočice zajedno?

Prema uslovima u zadatku, dobijamo numerički izraz
$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2)$.

Izračunavanjem brojne vrijednosti izraza dobijamo:

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2)=\left(\frac{12}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{10}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{6}{10}-\frac{2}{10}\right)=$$

$$=\left(\frac{12}{10}-\frac{12}{20}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{6-2}{10}\right)=\left(\frac{12\cdot 2}{10\cdot 2}-\frac{12}{20}\right)+\frac{4}{4}+\frac{4}{10}=$$

$$=\frac{24-12}{20}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{4\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{12}{20}+\frac{20}{20}+\frac{8}{20}=\frac{40}{20}=2.$$

Količina rastvora koja je ostala u sve tri bočice zajedno je 2 *l*.

Zadatak 2

Za kolač se koriste $\frac{3}{4}$ šolje šećera, 0,5 šolje ulja i $\frac{1}{3}$ šolje mlijeka. Dodaje se još 0,2 šolje vode i polovina smjese se stavlja u kalup. Koliko šolja smjese je stavljeno u kalup?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj vrijednost brojnog izraza:

   a) $8\frac{3}{8}-3\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\left(7\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}\right)$,

   b) $-\frac{7}{8}+4{,}5-\left(1\frac{2}{3}+\frac{-6}{2}\right)\cdot 3$,

   c) $\left[\left(3\frac{1}{2}-4\right)\cdot(-1{,}2)-\left(-\frac{7}{10}\right)\right]\cdot 0{,}25$,

   d) $\left\{-2{,}4+\frac{3}{4}\cdot(-10)-[-1{,}2+(-6)]:0{,}5\right\}+\frac{1}{2}$.

   Objasni redoslijed izvršavanja operacija.

2. Temperatura u laboratoriji bila je 21,5 °C. Prvo se povećala za 3,2 °C, a zatim se smanjila za 0,5 °C, i na kraju se povećala za još 0,1 °C. Kolika je konačna temperatura?

3. U bokal se sipa 1,2 *l* vode, zatim se dodaje $\frac{3}{10}$ *l* mlijeka i 0,25 *l* se oduzima od dobijene tečnosti. Postupak se ponavlja dva puta. Koliko litara vode će biti u bokalu na kraju?

4. Marina priprema smuti sa $\frac{2}{3}$ *l* jogurta, 0,25 *l* soka i $\frac{1}{10}$ *l* vode. Podijelila je smuti na 3 čaše. Koliko tečnosti ima u jednoj čaši?

5. Jedna prodavnica je nabavila 12,5 kg nara po cijeni od 95 denara po kilogramu. Platila je dodatnih 235 denara za ambalažu. Ako su prodali $\frac{4}{5}$ nara po cijeni od 124 denara po kilogramu, da li je prodavnica ostvarila gubitak ili profit?
   Uputstvo: Uporedi prihod sa dijelom rashoda koji se odnose na prodatu količinu.

6. Autobus na relaciji Skoplje – Niš troši u prosjeku 2,4 litra dizel goriva na 10 km. Put je dug 210 km. Cijena 1 litra dizela je 1,65 eura. Autobus prevozi 56 putnika. Svaki od njih plaća po 21,20 €, osim 6 putnika koji imaju kartu sa popustom od 1,50 €. Koliki je ukupni prihod?

16. DVOJNI RAZLOMCI

Aktivnost

Zapiši sljedeće količnike cijelih brojeva kao razlomke.
a) 7 : 9 b) 12 : 5 c) 1 : 4

Količnike $5:\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}:(-7)$, $\frac{5}{3}:\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}$, $\frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}$ i $7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}$ možemo da zapišemo i kao:

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5}{\frac{3}{4}},\ \frac{2}{3}:(-7)=\frac{\frac{2}{3}}{-7},\ \frac{5}{3}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}},\ 2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}},\ \frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}=\frac{\frac{-3}{8}}{4\frac{7}{9}},\ 7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}=\frac{7\frac{3}{5}}{1\frac{4}{9}}.$$

Takve izraze nazivamo dvostrukim razlomcima.

Razlomak čiji je brojilac ili imenilac razlomak naziva se **dvostruki razlomak.**

Razlomačka crta koja odvaja brojilac od imenioca dvostrukog razlomka naziva se **glavna razlomačka crta.**

Primjer 1

Zapiši količnike kao dvostruke razlomke:

a) $4 : \frac{2}{3}$, b) $\frac{5}{8} : 6$, c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$.

a) $4 : \frac{2}{3} = \frac{4}{\frac{2}{3}}$, b) $\frac{5}{8} : 6 = \frac{\frac{5}{8}}{6}$, c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$.

Zadatak 1

Predstavi količnike kao dvostruki razlomak:

a) $\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$, $\frac{4}{7} : \frac{1}{6}$, $\frac{9}{11} : \frac{12}{-5}$, b) $5 : \frac{3}{7}$, $\frac{2}{5} : 7$ i $3\frac{1}{5} : 7$.

U dvostrukom razlomku $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ brojevi a i d su **spoljašnji članovi**, a brojevi b i c su **unutrašnji članovi.**



Primjer 2

Napiši spoljašnje i unutrašnje članove dvostrukog razlomka: a) $\frac{\frac{8}{11}}{6}$, b) $\frac{7}{\frac{-2}{9}}$.

Ako su brojilac i imenilac složenog razlomka cijeli brojevi, tada će predstavljanjem svakog od njih kao razlomka s imeniocem 1, složeni razlomak dobiti potpuni oblik, odnosno imaće četiri člana.

a) $\frac{\frac{8}{11}}{6} = \frac{\frac{8}{11}}{\frac{6}{1}}$, Spoljašnji članovi su 8 i 1, a unutrašnji članovi su 11 i 6.

b) $\frac{7}{\frac{-2}{9}}$, Spoljašnji članovi su 7 i 9, a unutrašnji članovi su 1 i - 2.

Primjer 3

Pretvori dvostruki razlomak u prost razlomak: a) $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}}$, b) $\frac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{7}}$.

Dvostruki razlomak se pretvara u prost razlomak kada se brojilac podijeli imeniocem.

a) $\frac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{7} : \frac{5}{4} = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$,

b) $\frac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{7}} = \frac{\frac{-5}{9}}{\frac{4}{7}} = \frac{(-5) \cdot 7}{9 \cdot 4} = \frac{-35}{36} = -\frac{35}{36}$.

Dvostruki razlomak se pretvara u prost razlomak tako što se proizvod spoljašnjih članova zapiše kao brojilac, a proizvod unutrašnjih članova kao imenilac prostog razlomka:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Zadatak 2

Pretvori obični razlomak u dvostruki razlomak: a) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}$, b) $\frac{-5}{\frac{4}{9}}$, c) $\frac{\frac{3}{8}}{5}$.

Primjer 4

Pretvori dvostruki razlomak u obični razlomak: a) $\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$, b) $\frac{7{,}4}{\frac{4}{5}}$.

a) $\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

Mješovite brojeve zapisujemo kao neprave razlomke.

b) $\frac{7{,}4}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{74}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{74 \cdot 5}{10 \cdot 4} = \frac{370}{40} = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$

Decimalne brojeve zapisujemo u decimalnim razlomcima.

Primjer 5

Pretvori u prost razlomak $\frac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}$.

$$\frac{2-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{10-2}{5}}{\frac{4+5}{6}}=\frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{6}}$$

Izračunavamo brojilac i imenilac.

$$=\frac{8\cdot 6}{5\cdot 9}=\frac{48}{45}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$$

Zatim pretvaramo dvostruki razlomak u prost razlomak.

Zadatak 3

Pretvori u prost razlomak: a) $\frac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}+\frac{1}{3}}$, b) $\frac{2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}{3}$, c) $\frac{\frac{1}{5}-0{,}3}{1-\frac{2}{5}}$.

Zadatak 4

Koliko vreća od $\frac{1}{8}$ kg može da se napuni sa $31\frac{1}{4}$ kg kafe?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Pretvori prost razlomak u dvostruki razlomak: a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$, b) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$, c) $\frac{-\frac{2}{7}}{4}$, d) $\frac{2}{\frac{3}{2}}$.
2. Pretvori prost razlomak u dvostruki razlomak: a) $\frac{1\frac{3}{4}}{2\frac{1}{3}}$, b) $\frac{2{,}4}{\frac{4}{5}}$, c) $\frac{2\frac{2}{5}}{1{,}4}$, d) $\frac{0{,}12}{0{,}15}$.
3. Izvrši date operacije:
   a) $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{5}$, b) $\frac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{2}{9}}$, c) $\frac{3}{\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}}$, d) $\frac{2\frac{3}{10}+\frac{4}{15}-\frac{3}{30}}{\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+\frac{1}{12}}$.
4. Razliku razlomaka $\frac{6}{5}$ i $3\frac{3}{5}$ podijeli njihovim zbirom.
5. Količnik brojeva $3\frac{5}{8}$ i 0,2 saberi sa količnikom brojeva 0,2 i $3\frac{5}{8}$.
6. Bure u koje može da stane $1\frac{5}{8}$ m³ vode napuni se iz slavine za 3 minute. Sa koliko vode ćeš napuniti bure ako otvoriš slavinu samo jednu minutu?

17. STEPENI SA CJELOBROJNOM OSNOVOM I STEPENOVIM POKAZATELJEM - PRIRODNIM BROJEM

Pojam stepena

Aktivnost

U 5 rukometnih utakmica, ukupan broj golova za njihov tim postiglo je 5 rukometaša koji su postigli 5 golova u svakoj utakmici.

a) Napiši izraz koji možeš koristiti da bi izračunao/la koliko je golova tim postigao u svakoj od utakmica?

b) Napiši izraz koji možeš koristiti da bi izračunao/la koliko je golova tim postigao ukupno u svih pet utakmica. Kako bi skraćeno napisao/la ove izraze?

Za proizvod od 4 činioca jednaka broju 3, ukratko pišemo:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ čitamo „3 na četvrti stepen“ ili „3 na četvrti“.

Stepeni pokazatelj 4 pokazuje koliko puta se osnova 3 množi sa samom sobom.

Slično tome, imamo da:

$5 \cdot 5 = 5^2$ čita se „5 na stepen 2“ ili „5 na kvadrat“,

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ čita se „7 na stepen 3“ ili „7 na treći“ ili „7 na kub“

Množenje jednakih činilaca dovodi do operacije **stepenovanja**.

Proizvod n jednakih činilaca, od kojih je svaki cijeli broj a, naziva se **stepen** broja a sa **pokazateljem** prirodnog broja n i označava se sa a^n (čita se „a na stepen n“ ili „a na n-ti“).
Broj a se naziva **osnova stepena**.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ puta}} = a^n$$

a^n → stepeni pokazatelj – prirodni broj

a^n → osnova stepena – cijeli broj

БPošto svaki proizvod ima najmanje dva činioca, prema definiciji za stepen, pokazatelj ne smije biti manji od dva. Stoga, slažemo se da stepen prirodnog broja a sa pokazateljem 1 bude sam broj a.

$a^1 = a$

U tom smislu, na primjer, $8^1 = 8$, $(-2)^1 = -2$, $1^1 = 1$, $(-1)^1 = -1$, itd.

Iz definicije primjećujemo da je osnova stepena činilac, a pokazatelj je broj činilaca i pokazuje koliko puta se osnova stepena uzima kao činilac.

Primjer 1

Napiši proizvod kao stepen, a zatim ga pročitaj:

a) $4 \cdot 4 \cdot 4$, b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, c) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$.

a) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, čitamo „4 na treći stepen“ ili „4 na treći“,

b) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^5$, čitamo „minus 6 na peti stepen“ ili „minus 6 na peti“,

c) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = (-x)^4$, čitamo „minus x na četvrti stepen“ ili „minus x na četvrti“

Primjer 2

Napišite stepen kao proizvod jednakih činilaca: a) 7^3, b) $(-5)^5$, c) $(-y)^2$.

a) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$, b) $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$, c) $(-y)^2 = (-y) \cdot (-y)$.

Zadatak 1

Precrtaj i popuni tabelu:

stepen	5^2		$(-3)^3$			$(-7)^8$		$(-z)^6$	
osnova stepena		4		-3	-1		1		$a - b$
stepeni pokazatelj		8		2	5		9		4

Zadatak 2

Napiši proizvod kao stepen, a zatim ga pročitaj:
a) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, c) $x \cdot x \cdot x \cdot x$, č) $(-b) \cdot (-b)$,

Zadatak 3

Pročitaj stepen, a zatim ga napiši kao proizvod jednakih činilaca:
a) 6^3, b) $(-9)^2$, c) 0^6, č) 1^2, ć) $(-1)^9$, d) a^7, dž) $(-c)^5$, đ) $(x + y)^4$.

Zadatak 4

U populaciji od 1 bakterije, broj bakterija N povećava se prema formuli $N = 3^n$, gdje n predstavlja broj sati. Koliko će bakterija biti poslije 6 sati?

Vrijednost stepena

Aktivnost

Arben je proslavio svoj rođendan. Pozvao je 3 učenika iz svog razreda. Svaki od njih pozvao je još 3 učenika iz drugih razreda, a oni su pozvali još 3 učenika iz druge škole.

a) Napiši kao stepen broj učenika koji su bili pozvani na rođendansku proslavu.
b) Napiši stepen kao proizvod i izračunaj proizvod.
c) Koliko je učenika bilo pozvano na rođendansku proslavu?

Vrijednost stepena bilo kog cijelog broja izračunava se tako što se stepen zapiše kao proizvod, a zatim se vrši množenje.
Izračunavanje vrijednosti stepena možemo izvršiti i pomoću kalkulatora.
Za izračunavanje vrijednosti stepena pomoću stepenog pokazatelja 2 (kvadrat) i stepenog pokazatelja 3 (kub) koristimo dugmiće x^2 i x^3.

Za izračunavanje stepena sa pokazateljem koji nije 2 (kvadrat) ili 3 (kub), koristimo dugmiće x^n ili y^x.

Aktivnost

Zapiši: a) kvadrate brojeva od 1 do 20, b) kubove brojeva od 1 do 5.
Pokušaj da ih zapamtiš da bi ih koristio pri rješavanju zadataka.

Primjer 1

Izračunaj vrijednost stepena: a) 4^3, b) $(-2)^5$, c) $(-7)^2$, č) 1^4, ć) 0^6.

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
ili na kalkulatoru
4 x^3 =

Osnova stepena i stepeni pokazatelj su pozitivni brojevi.
Vrijednost stepena je pozitivan broj.

b) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
ili na kalkulatoru
(–) 2 x^n 5 =

Osnova stepena je negativan broj, a stepeni pokazatelj je neparan broj.
Vrijednost stepena je negativan broj.

c) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$
ili na kalkulatoru
(–) 7 x^2 =

Osnova stepena je negativan broj, a pokazatelj je paran broj.
Vrijednost stepena je pozitivan broj.

č) $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, ć) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Aktivnost

Napiši eksponent i izračunaj njegovu vrijednost:
a) osnova 3 i pokazatelj 6, b) osnova -2 i pokazatelj 3, c) osnova -4 i pokazatelj 2.
Da li možeš da izvedeš zaključak o vezi između znaka osnove i parnosti stepena, sa znakom vrijednosti stepena?

- Vrijednost stepena pozitivnog cijelog broja je pozitivan cijeli broj.
- Vrijednost stepena negativnog cijelog broja sa parnim pokazateljem je pozitivan cijeli broj.
- Vrijednost stepena negativnog cijelog broja sa neparnim pokazateljem je negativan cijeli broj.
- Ako je $a = 1$, onda je $a^n = 1$ i ako je $a = 0$, onda je $a^n = 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 1

Bez računanja, odredi znak stepena: a) 13^5, b) $(-26)^{52}$, c) $(-77)^{45}$, č) 1^{44}.

Zadatak 2

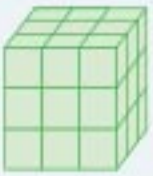
U fizici, pri izračunavanju usmjerene sile (sa znakom „–“ za smjer ulijevo), koristi se izraz koji sadrži silu na kvadrat ili kub. Ako je sila –3 N, izračunaj njenu:
a) kvadratnu vrijednost, b) kubnu vrijednost.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Zapiši osnovu i stepeni pokazatelj stepena:
   a) 6^3, b) $(-9)^2$, c) $(3x)^6$, č) $(-a + 4)^k$, ć) $(-7p^7)^9$ d) 0^{30}.
2. Napiši proizvod kao stepen:
   a) $9 \cdot 9 \cdot 9$, b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, c) $(-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x)$,
   č) $(a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b)$, ć) $xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy$.
3. Napišite proizvod stepena:
   a) 6^7, b) $(-19)^2$ c) a^3, č) $(-x)^2$, ć) $(-c - 1)^7$, d) $(m^3)^5$.
4. Izračunaj vrijednost stepena: a) 3^4, b) $(-6)^3$, c) $(-2)^4$.
   Provjeri rezultat pomoću kalkulatora.
5. Provjeri tačnost jednačine: a) $(-5)^4 = 5^4$, b) $(-4)^3 = -4^3$, c) $(-3)^4 = -1 \cdot 3^4$.
6. Za koje prirodne brojeve je tačna jednačina:
   a) $0^n = 0$, b) $2^n > 0$, c) $1^n = 1$, č) $(-4)^n > 0$, ć) $(-7)^n < 0$?
7. U kompjuterskoj simulaciji, broj dronova se udvostručuje poslije svake runde. Koliko će dronova biti poslije 5 rundi, ako je na početku bilo 3 mikrodrona?
8. U eliminacionom šahovskom turniru, broj igrača se prepolovljuje poslije svakog odigranog kola. Koliko će igrača ostati poslije 4 kola, ako je turnir počeo sa 128 igrača?
9. Žaba se nalazi u koordinatnom početku x-ose. Poslije svakog skoka, udvostručuje rastojanje od koordinatnog početka i mijenja smjer (lijevo, zatim desno, pa lijevo, ...). Položaj poslije n skokova je $(-2)^n$ m.
   a) U kom položaju je žaba poslije prvog skoka, a u kom položaju poslije drugog skoka?
   b) Poslije koliko skokova će žaba biti lijevo od koordinatnog početka, na udaljenosti od 32 m?

Istraživanje

Crtež 1 prikazuje kocku $3 \times 3 \times 3$ čija je površina obojena zelenom bojom.



crtež 1

a) Od koliko malih kocki dimenzija $1 \times 1 \times 1$ sastoji se kocka?
b) Koliko malih kocki je neobojeno?
c) Koliko malih kocki ima sa 1 obojenom stranom, koliko sa 2 obojene strane i koliko sa 3 obojene strane?
č) Odgovori na ista pitanja za kocku sa dimenzijama $4 \times 4 \times 4$.
ć) Precrtaj i dopuni tabelu.

kocka	broj zidova obojenih na malim kockama			
	0	1	2	3
$2 \times 2 \times 2$				
$3 \times 3 \times 3$				
$4 \times 4 \times 4$				
$5 \times 5 \times 5$				

d) Možeš li da otkriješ pravilo koje se odnosi na broj malih kocki i broj obojenih zidova na malim kockama? Provjeri pravilo za kocku $9 \times 9 \times 9$.

18. KVADRATNI KORIJEN I KUBNI KORIJEN

Квадратен корен

Aktivnost

Površina kvadrata je 16 cm^2.
a) Koliko centimetara iznosi jedna njegova stranica?
b) Kako izračunavamo stranicu?

Primjer 1

a) Popuni tabelu:

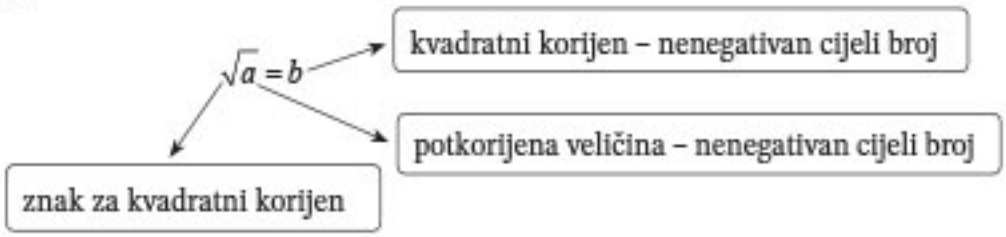
n			5		8
n^2	0	9		49	

Da bismo popunili tabelu potrebno je:
- da pronađemo kvadrate za brojeve 5 i 8, koji su 25 i 64, odgovarajući,
- da pronađemo brojeve čiji su kvadrati 0, 9 i 49.

Drugi zahtjev je obrnut od prvog, odnosno, za broj 9 treba da pronađemo broj čiji je kvadrat 9. Taj broj označavamo sa $\sqrt{9}$ i nazivamo ga kvadratni korijen broja 9.
Slično tome imamo da je $\sqrt{49} = 7$ jer $7^2 = 49$, i $\sqrt{0} = 0$ jer je $0^2 = 0$.

Kvadratni korijen nenegativnog cijelog broja a (ako postoji) je nenegativan cijeli broj b, takav da je $b^2 = a$. Broj a se naziva **potkorijena veličina** (ili radikand).
Operacija izračunavanja kvadratnog korijena datog broja naziva se **korjenovanje sa korjenim pokazateljem 2** ili jednostavno **korjenovanje**.

Zapisujemo:



Čitamo: „kvadratni korijen od a je b"

Na kalkulatorima postoji posebno dugme za izračunavanje kvadratnog korijena, obično označeno sa $\sqrt{\ }$. Dakle, da bismo izračunali kvadratni korijen iz 64, unosimo:
6 4 $\sqrt{\ }$ = ili $\sqrt{\ }$ 6 4 =.

Aktivnost

Prepiši i popuni tabelu:

n	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
$\sqrt{n}$										

Potrudi se da zapamtiš izračunate vrijednosti da bi ih koristio pri rješavanju zadataka.

Zadatak 1

Izračunaj i provjeri kalkulatorom: a) $\sqrt{25}$, b) $\sqrt{64}$, c) $\sqrt{361}$, č) $\sqrt{121}$.

Za broj 43, na primjer, ne postoji nenegativan cijeli broj čiji je kvadrat broj 43. Prema tome, ne postoji kvadratni korijen broja 43 u skupu nenegativnih cijelih brojeva. U takvim slučajevima možemo da napravimo **procjenu** vrijednosti kvadratnog korijena.

Primjer 2

Procijeni vrijednost $\sqrt{7}$ na jedno decimalno mjesto.

Prvo određujemo dva nenegativna cijela broja između čijih se kvadrata nalazi broj 7 (crtež 1). Jer

$2^2 < 7 < 3^2$ imamo da je $2 < \sqrt{7} < 3$.

Računamo kvadrate brojeva 2; 2,1; 2,2; 2,3; ... 2,9; 3, redom, dok njihova vrijednost ne pređe 7:

$2^2 = 4$; $2{,}1^2 = 4{,}41$; $2{,}2^2 = 4{,}84$; $2{,}3^2 = 5{,}29$;
$2{,}4^2 = 5{,}76$; $2{,}5^2 = 6{,}25$; $\mathbf{2{,}6^2 = 6{,}76}$; $\mathbf{2{,}7^2 = 7{,}29}$.

Prema proračunima, zaključujemo da

$6{,}76 = 2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2 = 7{,}29$, pa zato $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$.

Rastojanje od broja $2{,}6^2 = 6{,}76$ do broja 7 je 0,24 jedinice, dok je rastojanje od broja $2{,}7^2 = 7{,}29$ do broja 7 0,29 jedinica.

Pošto je $0{,}24 < 0{,}29$, broj $2{,}6^2 = 6{,}76$ je bliži broju 7, što znači da je $\sqrt{7}$ bliže broju 2,6.

Prema tome, $\sqrt{7} \approx 2{,}6$.



crtež 1

Zadatak 2

Procijeni vrijednost od $\sqrt{50}$ na jedno decimalno mjesto. Zatim, provjeri svoju procjenu kalkulatorom.

Zadatak 3

Panel ima 2401 identičnu lampu raspoređenu u kvadratnu mrežu.
a) Koliko lampi ima u jednom redu?
b) Ako svaka lampa zauzima kvadrat sa stranicom od 1 cm, kolika je dužina stranice panela?

Kubni korijen

Aktivnost

Zapremina kocke je 27 cm^3. Koliko centimetara ima njena ivica?
Kako se izračunava dužina ivice?

Primjer 3

Prepiši i popuni tabelu:

n	3	-4		
n^3			8	-125

Da bi popunio/la tabelu, potrebno je da:

- pronađeš kubove brojeva 3 i -4, a to su brojevi 27 i -64, odgovarajuće,
- pronađeš brojeve čiji su kubovi 8 i -125.

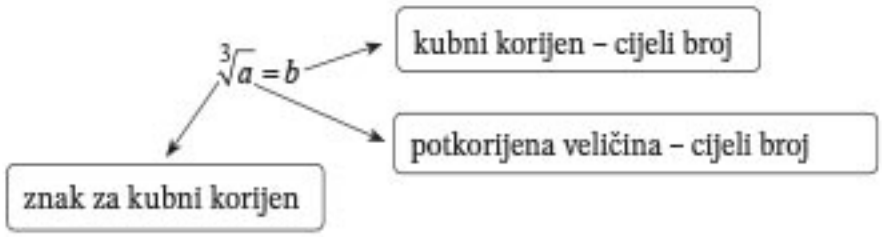
Drugi zahtjev je obrnut od prvog, odnosno, za broj 8 potrebno je pronaći broj čiji je kub

To je broj 2, koji je označen sa $\sqrt[3]{8}$ i naziva se kubni korijen broja 8.

Slično, vidimo da je $\sqrt[3]{-125} = -5$ jer je $(-5)^3 = -125$.

Kubni korijen (treći korijen) cijelog broja a je cijeli broj b takav da je $b^3 = a$ i označen je sa $\sqrt[3]{a}$. Broj a se naziva **potkorijenska veličina.**
Operacija izračunavanja kubnog korijena datog broja naziva se **korjenovanje sa korijenskim pokazateljem 3** ili **korjenovanje.**

Zapisujemo:



Čitamo: „kubni korijen od a je b" ili „treći korijen od a je b"

Na kalkulatorima postoji posebno dugme za izračunavanje kubnog korijena, obično označeno sa $\sqrt[3]{\ }$.
Dakle, da bismo izračunali kubni korijen od 125, unosimo

1 2 5 $\sqrt[3]{\ }$ = ili $\sqrt[3]{\ }$ 1 2 5 =

Aktivnost

Prepiši i popuni tabelu:

n	8	27	64	125
$\sqrt[3]{n}$				

Potrudi se da zapamtiš izračunate vrijednosti da bi ih koristio pri rješavanju zadataka.

Zadatak 4

Izračunaj i provjeri kalkulatorom: a) $\sqrt[3]{-27}$, b) $\sqrt[3]{8}$, c) $\sqrt[3]{-125}$, č) $\sqrt[3]{64}$.

Kao i kod kvadratnih korijena, ne postoji cijeli broj čiji je kub dati broj.
Stoga, nije svaki kubni korijen u skupu cijelih brojeva. U takvim slučajevima možemo da uradimo **procjenu** vrijednosti kubnog korijena.

Primjer 4

Procijenite vrijednost $\sqrt[3]{30}$ na jedno decimalno mjesto.

Prvo određujemo dva cijela broja između čijih kubova se nalazi broj 30. Pošto je

$3^3 < 30 < 4^3$ imamo da je $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

Izračunavamo kubove brojeva 3; 3,1; 3,2; 3,3; ... 3,9; 4, redom, dok njihova vrijednost ne pređe 30 (crtež 2):

$3^3 = 27$; $\mathbf{3{,}1^3 = 29{,}791}$; $\mathbf{3{,}2^3 = 32{,}768}$.

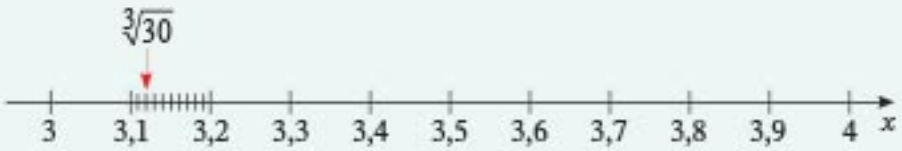
Prema proračunima, zaključujemo da

$29{,}791 = 3{,}1^3 < 30 < 3{,}2^3 = 32{,}768$, pa je zato $3{,}1 < \sqrt[3]{30} < 3{,}2$.

Udaljenost **od broja** $3{,}1^3 = 29{,}791$ do broja 30 je 0,209 jedinica, dok je udaljenost **od broja** $3{,}2^3 = 32{,}768$ do broja 30 2,768 jedinica.

Pošto je $0{,}209 < 2{,}768$, broj $3{,}1^3 = 29{,}791$ je bliži broju 30, što znači da je $\sqrt[3]{30}$ bliži broju 3,1.

Prema tome, $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}1$



crtež 2

Zadatak 5

Procijeni vrijednost $\sqrt[3]{10}$ na jedno decimalno mjesto. Zatim, provjeri svoju procjenu kalkulatorom.

Zadatak 6

U jednoj fabrici se pakuju kutije u obliku kocke u veliki sanduk. Sanduk sadrži tačno 125 kutija, podjednako raspoređenih po dužini, širini i visini. Koliko kutija ima svaka strana sanduka?

Izračunavanje vrijednosti brojnog izraza sa stepenom, kvadratnim i kubnim korijenom

Primjer 5

Izračunaj vrijednost izraza: a) $(-5)^3+15^2$, b) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125})$, c) $(4^2+2\sqrt[3]{64}):3$.

Potrebno je da slijedimo pravila:

a) $(-5)^3+15^2=-125+225=100$

b) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125})=4\cdot(4+(-5))=$
$=4\cdot(-1)=-4$

c) $(4^2+2\cdot\sqrt[3]{64}):3=(16+2\cdot4):3=$
$=(16+8):3=$
$=24:3=8$

- Prilikom izračunavanja vrijednosti brojnog izraza sa zagradama, **operacije unutar zagrada imaju prednost.**
- Prilikom izračunavanja vrijednosti brojnog izraza operacijama stepenovanja, korjenovanja, množenja, dijeljenja, sabiranja i oduzimanja, prvo vršimo **stepenovanje i korjenovanje**, zatim **množenje i dijeljenje**, i na kraju **sabiranje** i **oduzimanje**.

Zadatak 7

Izračunaj vrijednost izraza $(2^2-7\sqrt[3]{-125}):(5^2-4\sqrt{9})$.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj i provjeri kalkulatorom: a) $\sqrt{225}$, b) $\sqrt{144}$, c) $\sqrt{361}$, č) $\sqrt{121}$.
2. Procijeni vrijednost $\sqrt{68}$ na jednu decimalu.
3. Izračunaj i provjeri kalkulatorom: a) $\sqrt[3]{-64}$, b) $\sqrt[3]{-8}$, c) $\sqrt[3]{125}$, č) $\sqrt[3]{75}$.
4. Matej je sakupljač markera. Želio je da ih rasporedi u kvadratne ramove (broj redova je jednak broju kolona).
   a) Prvi ram je imao 9 redova sa 9 markera u svakom redu. Koliko je ukupno markera bilo u ovom ramu?
   b) Drugi ram je imao 121 marker. Koliko redova i kolona je imao ovaj ram, ako je broj redova jednak broju kolona?
5. Procijeni vrijednost $\sqrt[3]{75}$ na jedno decimalno mjesto.
6. Metalna kocka zapremine 243 cm^2 ispituje se u laboratoriji. Kolika je ivica kocke?
7. Male kutije sa kredama, koje su u obliku kocke, poredane su u kabinetu iz matematike. Kutije su poredane tako da formiraju veliku kocku.
   a) Ako ima ukupno 125 kutija, koliko kutija je poredano na jednoj strani velike kocke?
   b) Ako svaka mala kutija sa kredama ima zapreminu 64 cm^3, kolika je dužina stranice jedne kutije?

8. Izračunaj vrijednost izraza:

a) $(-5)^3 + 16^2) \cdot (7^2 - 2^3)$, b) $(-11)^2 - 5 \cdot (3^3 + \sqrt[3]{-27})$, c) $(\sqrt{9} + 12^2) : \sqrt[3]{27}$.

9. Izračunaj vrijednost izraza i provjeri je kalkulatorom:

a) $4a - \sqrt[3]{a-8} + \sqrt{a} + 2$ za $a = 16$, b) $(a + 2\sqrt[3]{a-17} - 4)^2 - \sqrt{a}$ za $a = 81$.

19. PISANJE BROJEVA U OBLIKU $a \cdot 10^k$, za $a, k \in \mathbb{N}$

U svakodnevnom životu često se susrećemo sa veoma velikim brojevima – brojem stanovnika u određenom gradu, zemlji ili kontinentu, rastojanjem među planetama, brojem bakterija u bakterijskoj populaciji itd. Za lakše pisanje takvih brojeva, koristimo stepene sa osnovom 10.

Stepeni sa osnovom 10 i eksponentnim pokazateljem prirodnim brojem

Znamo da deset jedinica čini deseticu, deset desetica čini stotinu, deset stotina čini hiljadu itd. Desetica, stotina, hiljada itd. nazivaju se i **decimalne jedinice**.

Aktivnost

Svaka decimalna jedinica može se zapisati kao stepen sa osnovom 10.
Prati postupak i uporedi broj nula u decimalnoj jedinici sa stepenim pokazateljem u njenom zapisu u obliku stepena sa osnovom 10.

$10 = 10 = 10^1$
$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$
$1\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$
$10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$
$100\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$
$1\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$
.....

Izvjesno je da je broj nula u decimalnoj jedinici jednak stepenom pokazatelju u njegovom zapisu u obliku stepena sa osnovom 10, odnosno

$\underbrace{1000\cdots0}_{k \text{ nula}} = 10^k$, za $k \in \mathbb{N}$.

Primjer 1

Napiši decimalnu jedinicu datu u rečenici u obliku stepena sa osnovom 10:
a) Masa Neptuna je oko $\underbrace{1000\cdots0}_{26\text{ nul i}}$ kg. b) Masa Mjeseca je oko $\underbrace{1000\cdots0}_{23\text{ nul i}}$ kg.

a) $\underbrace{1000\cdots0}_{26\text{ nul i}}=10^{26}$, b) $\underbrace{1000\cdots0}_{23\text{ nul i}}=10^{23}$.

Zadatak 1

Napiši decimalnu jedinicu koja je jednaka stepenu naznačenom u rečenici:
a) Broj ćelija u ljudskom tijelu je 10^{14}. b) Masa Sunca je oko 10^{30} kg.

Za čitanje i pisanje velikih brojeva, neki stepeni oblika 10^k, za $k \in \mathbb{N}$, imaju posebna imena.
To su stepeni:

10^3 čita se kao **kilo** i piše se kao k,
106 čita se kao **mega** i piše se kao M,
10^9 čita se kao **giga** i piše se kao G,
10^{12} čita se kao **tera** i piše se kao T.

Primjer 2

Nikolija je kupila kompjuterski disk sa 1 gigabajtom (GB) memorije. Ador je izračunao da je
$1\text{ GB} = 10^3\text{ MB}$.
Da li je Ador tačno izračunao?

Ador je tačno izračunao, jer je
$\mathbf{1\text{ GB}} = 1\,000\,000\,000\text{ B} = 1000 \cdot 1\,000\,000\text{ B} = 10^3 \cdot 10^6\text{ B} = \mathbf{10^3\text{ MB}}$.

Zapisivanje brojeva u obliku $a \cdot 10^k$, za $a, k \in \mathbb{N}$

Brojevi koji se mogu zapisati kao proizvod prirodnog broja i decimalne jedinice, mogu se zapisati i kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.

Broj 3 000 000 ne možemo da zapišemo kao stepen sa osnovom 10. Zato ga prvo zapisujemo kao proizvod dva broja, od kojih jedan može da se zapiše kao stepen sa osnovom 10, tj.
$3\,000\,000 = 3 \cdot 1\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.

Primjer 3

Zapiši kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10, broj naveden u rečenici:
a) Broj crvenih krvnih zrnaca u 1 l krvi je oko $\underbrace{5000\cdots0}_{12\text{ nula}}$.

b) Prečnik vidljivog dijela Univerzuma je oko $\underbrace{88000\cdots0}_{25\text{ nula}}$ m.

a) $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ NULA}} = 5\cdot\underbrace{1000\cdots0}_{12\text{ NULA}} = 5\cdot10^{12}$, b) $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ NULA}}\ \text{m} = 88\cdot\underbrace{1000\cdots0}_{25\text{ NULA}}\ \text{m} = 88\cdot10^{25}\,\text{m}$.

Zadatak 2

Napiši broj dat u rečenici kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10:

a) Rastojanje od Sunca do Neptuna je oko $45\underbrace{000\cdots0}_{11\text{ NULA}}$ m.

b) Masa Sunca je oko $1\,99\underbrace{000\cdots0}_{28\text{ NULA}}$ kg.

Primjer 4

Sjeverna Makedonija ima $180\cdot10^4$ stanovnika, Grčka ima $10\cdot10^6$ stanovnika, a Bugarska ima $69\cdot10^5$ stanovnika. Koja država ima najviše stanovnika, a koja najmanje?

$180\cdot10^4 = 180\cdot10^4$
$10\cdot10^6 = 1\,000\cdot10^4$
$69\cdot10^5 = 690\cdot10^4$

Brojeve zapisujemo tako da svi stepeni pokazatelji u novim zapisima budu jednaki 4 (najmanji među stepenim pokazateljima).

$180 < 690 < 1\,000$

Upoređujemo činioce ispred odgovarajućih stepena sa osnovom 10 kao prirodnim brojevima.

Sjeverna Makedonija ima najmanje stanovnika, a Grčka najviše.

Primjer 5

Brzina svjetlosti je oko 300.000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Rastojanje koje svjetlost pređe za godinu dana naziva se **svjetlosna godina** (ly). Koliko kilometara približno iznosi jedna svjetlosna godina?

Zapišite svjetlosnu godinu kao proizvod dva broja, od kojih je jedan stepen sa osnovom 10.

1 godina = 365 dana 1 dan = 24 sata 1 sat = 60 minuta 1 minut je 60 sekundi

$1\ \text{ly} \approx 300\,000\cdot365\cdot24\cdot60\cdot60 = 9460800\,000\,000 = 94\,608\cdot10^8$ km.

Jedna svjetlosna godina je oko $94\,608\cdot10^8$ kilometara.

Zadatak 3

Superračunar obrađuje 25 000 000 instrukcija u sekundi.

a) Napiši broj instrukcija kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.

b) Uporedi brzinu superračunara sa brzinom običnog računara koji obrađuje 25 000 instrukcija u sekundi.

Zaokruživanje brojeva na najbližu decimalnu jedinicu 10^k, $k \in \mathbb{N}$

Zapisivanje brojeva u obliku proizvoda prirodnog broja i stepena sa osnovom 10 može olakšati postupak zaokruživanja brojeva na najbližu decimalnu jedinicu, tj. na najbližu deseticu, stotinu, hiljadu itd.

Aktivnost

1. Koristeći brojevnu pravu, zaokruži brojeve 342, 367, 362, 347:
   a) na najbližu deseticu, b) na najbližu stotinu.

Koje od zaokruživanja je zaokruživanje sa viškom, a koje sa manjkom?

2. Ema i Admir su dobili zadatak da pripreme prezentaciju o postupku zaokruživanja prirodnih brojeva, bez korištenja brojevne prave.

Ema je na svom hameru izložila pravila:

1) Ako je cifra desno od **cifre na koju zaokružujemo**:
   - 5, 6, 7, 8 ili 9, onda se cifra na koju zaokružujemo povećava za 1.
     Kažemo da **zaokružujemo sa viškom**.
   - 0, 1, 2, 3 ili 4, onda cifra na koju zaokružujemo ostaje nepromijenjena.
     Kažemo da **zaokružujemo sa manjkom**.
2) Cifre **desno od cifre na koju zaokružujemo** zamjenjujemo cifrom 0.
3) Cifre **lijevo od cifre na koju zaokružujemo ostaju nepromijenjene**, osim kada prenosimo pri zaokruživanju sa viškom.

Naročito, ako je cifra na koju zaokružujemo 9 i zaokružujemo sa viškom, onda je zamjenjujemo cifrom 0, a prva cifra lijevo od nje povećava se za 1. Ako je cifra lijevo također 9, prenošenje se nastavlja ulijevo dok se ne poveća cifra manja od 9.
Ako lijevo nema cifre, lijevo se dopisuje cifra 1.

Admir je ukazao na nekoliko primjera na svom hameru:

Broj 825 zaokružen na najbližu deseticu je broj 830. Pišemo $825 \approx 830$.	Broj 1237 zaokružen na najbližu stotinu je broj 1200. Pišemo $1237 \approx 1200$.
Broj 962 zaokružen na najbližu hiljadu je broj 1000. Pišemo $962 \approx 1000$.	Broj 984 zaokružen na najbližu stotinu je broj 1000. Pišemo $984 \approx 1000$.

Da li je Emina i Admirova prezentacija tačno urađena?

Postupak zaokruživanja prirodnog broja n na najbližu decimalnu jedinicu 10^k, $k \in \mathbb{N}$, sastoji se od pronalaženja prirodnog broja koji ima k nula i koji je najbliži broju n.

Primjer 6

Zaokružite broj:
a) 1 430 000 na najbližu decimalnu jedinicu 10^5,
b) 22 372 000 000 na najbližu decimalnu jedinicu 10^8,
c) 1 950 000 000 000 na najbližu decimalnu jedinicu 10^{11}.

a) $1\,430\,000 \approx 1\,400\,000$
Zaokruživanje se vrši sa manjkom.

- Cifra 4 ima mjesnu vrijednost $4 \cdot 10^5$, pa je cifra na koju zaokružujemo 4.
- Desno od cifre 4 je cifra 3, pa cifra 4 ostaje nepromijenjena.
- Cifre lijevo od cifre 4 ostaju nepromijenjene, a cifre desno od cifre 4 zamjenjuju se cifrom 0.

b) $22\,372\,000\,000 \approx 22\,400\,000\,000$
Zaokruživanje je sa viškom.

- Cifra 3 ima mjesnu vrijednost $3 \cdot 10^8$, pa je cifra na koju zaokružujemo 3.
- Desno od cifre 3 nalazi se cifra 7, pa se cifra 3 zamjenjuje cifrom 4.
- Cifre lijevo od cifre 3 ostaju nepromijenjene, a cifre desno od cifre 3 zamjenjuju se cifrom 0.

c) $1\,950\,000\,000\,000 \approx 2\,000\,000\,000\,000$
Zaokruživanje je sa viškom.

- Cifra 9 ima mjesnu vrijednost $9 \cdot 10^{11}$, pa je cifra na koju zaokružujemo 9.
- Desno od cifre 9 nalazi se cifra 5, pa se cifra 9 zamjenjuje cifrom 0 i ispred nje dopisujemo 1.
- Cifre desno od cifre 9 zamjenjujemo cifrom 0.

Zadatak 4

U laboratoriji je pripremljeno 564 300 000 molekula novog jedinjenja za eksperiment.
a) Zapiši broj molekula kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.
b) Zaokruži broj molekula na najbližu decimalnu jedinicu 10^6.
c) Zaokruži broj molekula na najbližu decimalnu jedinicu 10^7.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Napiši broj kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10:
   a) 40 000 000, b) 5 000 000 000, c) 600 000 000 000.
2. Jedan gram zemlje sadrži oko 1 000 000 000 bakterija. Napiši broj bakterija u obliku stepena sa osnovom 10.
3. U bolnici se za godinu dana pripremi 3 200 000 doza vakcina.
   a) Napiši broj doza u obliku proizvoda prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.
   b) Objasni zašto je oblik pod a) lakši za korištenje od datog oblika.

4. U velikom supermarketu postoji 120.000 limenki soka. Vlasnik želi da zapiše broj limenki na način na koji može lakše da se upoređuje sa drugim supermarketima. Napiši broj limenki kao proizvod prirodnog broja i stepena čija je osnova 10.

5. Tabela prikazuje broj stanovnika u nekoliko zemalja.
Poredajte brojeve od najmanjeg do najvećeg.

država	broj stanovnika
Indija	$1\,420 \cdot 10^6$
SAD	$335 \cdot 10^6$
Njemačka	$84 \cdot 10^6$
Malta	$52 \cdot 10^4$
Island	$38 \cdot 10^4$

6. Mašina izvrši 10.000 aritmetičkih operacija u jednoj sekundi.
a) Nađi broj aritmetičkih operacija koje mašina izvrši za jedan sat.
b) Zapiši taj broj kao stepen sa osnovom 10.

7. Veliki grad proizvodi 4 275 000 kg otpada dnevno.
a) Napiši količinu otpada kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.
b) Predstavi količinu otpada proizvedenog za jedan mjesec kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.

8. Zaokruži broj:
a) 44 162 000 000 000 na najbližu decimalnu jedinicu 10^{12},
b) 78 000 000 000 000 na najbližu decimalnu jedinicu 10^{13},
c) 3 989 000 000 000 000 na najbližu decimalnu jedinicu 10^{15}.

9. Velika fabrika proizvela je 426 000 000 000 baterija za jednu godinu.
a) Napiši broj proizvedenih baterija kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.
b) Zaokruži broj baterija na najbližu decimalnu jedinicu 10^{10}.
c) Zaokruži broj baterija na najbližu decimalnu jedinicu 10^{11}.

Istraživanje

Pronađi na internetu druge primjere velikih brojeva iz prirodnih nauka i zapiši ih kao proizvod prirodnog broja i decimalne jedinice.

20. MNOŽENJE I DIJELJENJE STEPENA SA ISTIM OSNOVAMA

Množenje stepena sa istim osnovama

Aktivnost

Razmotrite i objasnite kako se množe stepeni sa istom osnovom:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3}$.

Navedi korake u kojima se koriste definicija stepena i asocijativni zakon množenja.

Pravilo važi za proizvod bilo koja dva stepena sa istim osnovama.

Proizvod dva stepena sa istom osnovom jednak je stepenu sa istom osnovom, a eksponent stepena jednak je zbiru eksponenata tih stepena, odnosno

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Primjer 1

Napiši proizvod u obliku stepena: a) $8^2 \cdot 8^6$, b) $(-3)^3 \cdot (-3)$, c) $x^m \cdot x^n$.

a) $8^2 \cdot 8^6 = 8^{2+6} = 8^8$, b) $(-3)^3 \cdot (-3) = (-3)^3 \cdot (-3)^1 = (-3)^{3+1} = (-3)^4$, c) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Možemo da vidimo da pravilo važi i za proizvod od više stepena sa jednakim osnovama. Naime, zbog asocijativnog zakona sabiranja i asocijativnog zakona množenja, imamo

$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}$.

Prilikom množenja stepena sa istom osnovom, osnova ostaje ista, a pokazatelji se sabiraju.

Primjer 2

Napiši proizvod u obliku stepena:
a) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3$, b) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \, (-5)^5 \cdot (-5)^3$, c) $y^k \cdot y^n \cdot y^p$.

a) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3 = 6^{2+6+3} = 6^{11}$, b) $(-5)^7 \cdot (-5)^2 \, (-5)^5 \cdot (-5)^3 = (-5)^{7+2+5+3} = (-5)^{17}$,
c) $y^k \cdot y^n \cdot y^p = y^{k+n+p}$.

Zadatak 1

Napiši proizvod u obliku stepena:
a) $10^4 \cdot 10^6$, b) $(-3)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3$, c) $a^5 \cdot a^6$, č) $(x-1)^4 \cdot (x-1) \cdot (x-1)^7 \cdot (x-1)^{12}$.

Primjer 3

Pojednostavi izraz: a) $9x^7 \cdot 3x^3$, b) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7$.

a) $9x^7 \cdot 3x^3 = (9 \cdot 3)\, x^{7+3} = 27x^{10}$,
b) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7 = (0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1)(y+1)^{5+4+7} = 0{,}012(y+1)^{16}$.

Zadatak 2

Pojednostavi izraz: a) $9x^7 \cdot 3x^3$, b) $5a^7 \cdot 3a \cdot 0{,}1a^3$.

Primjer 4

Cvjećarka Mila sadi 2^2 cvijeta u jednu saksiju. Tokom dana posadila je 2^3 saksije. Koliko je cvjetova ukupno posadila u toku dana?

Zapišimo rješenje u obliku stepena, a zatim izračunajmo njegovu vrijednost.
Imamo

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Cvjećarka Mila je tokom dana posadila 32 cvijeta.

Zadatak 3

Fabrika je proizvela 2^5 konzervi prvog dana. Koliko će konzervi proizvesti za 4 dana, ako se proizvodnja udvostručuje svakog dana?

Dijeljenje stepena sa jednakim osnovama

Aktivnost

Otkrij pravilo za dijeljenje stepena sa jednakim osnovama prema izračunavanju:

$$3^6 : 3^2 = \frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4 = 3^{6-2}$$

Količnik dva stepena sa jednakim osnovama različitim od nule, kod kojih je stepeni pokazatelj djeljenika veći od stepenog pokazatelja djelioca, jednak je stepenu sa istom osnovom i stepenim pokazateljem jednakim razlici pokazatelja djeljenika i djelioca tih stepena, odnosno

$$a^n : a^m = a^{n-m},\ a \in \mathbb{Z},\ a \neq 0,\ n, m \in \mathbb{N} \text{ i } n > m.$$

Primjer 5

Zapiši količnik kao stepen: a) $11^8 : 11^3$, b) $(-x)^{12} : (-x)^4$.

a) $11^8 : 11^3 = 11^{8-3} = 11^5$, b) $(-x)^{12} : (-x)^4 = (-x)^{12-4} = (-x)^8$.

Zadatak 4

Zapiši količnik kao stepen:
a) $5^6 : 5^4$, b) $(-4)^{12} : (-4)^7$, c) $b^{72} : b^{46}$, č) $(x-y)^7 : (x-y)^3$.

Zadatak 5

Koje od sljedećih jednačina su tačne:
a) $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$, b) $3^5 \cdot 3^3 = 3^2$, c) $7^9 : 7^2 = 7^7$, č) $x^x \cdot x^8 = x^{x-8}$, ć) $m^3 : m = m^3$?
Obrazloži odgovor.

Primjer 6

Uprosti izraz: a) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5)$, b) $\frac{a^9}{a^4 \cdot a^2}$.

a) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5) = x^{12} : x^{3+5} = x^{12} : x^8 = x^{12-8} = x^4$, b) $\frac{a^9}{a^4 \cdot a^2} = \frac{a^9}{a^{4+2}} = \frac{a^9}{a^6} = a^{9-6} = a^3$.

Zadatak 6

Uprosti izraz: a) $s^3 \cdot s^4 \cdot s^2 : s^5$, b) $n^4 \cdot n^1 : n^2$, c) $r^{16} : r^4 \cdot r^3 \cdot r^5$.

Zadatak 7

Izračunaj vrijednost izraza: a) $(2^{14} \cdot 2^2) : 2^9$, b) $\frac{3^{14}}{3^7 \cdot 3^4}$, c) $\frac{8 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (2^5 : 4)}$.

Primjer 7

U jednoj fabrici se pakuju 3^4 kutije slatkiša u toku dana. Noću fabrika pakuje 3^2 kutije slatkiša. Koliko puta više kutija slatkiša fabrika spakuje u toku dana nego noću?

Hajde da zapišemo rješenje u obliku stepena i da izračunamo njegovu vrijednost:
$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$.
Fabrika pakuje 9 puta više kutija slatkiša u toku dana nego noću.

Primjer 8

Rastvor natrija (Na) čuva se u hemijskoj laboratoriji u kojoj koncentracija čestica raste i opada u zavisnosti od uslova. Naučnik je zapisao izraz za koncentraciju rastvora.

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4$.

Pojednostavite – uprostite izraz za koncentraciju rastvora.

Svi stepeni imaju osnovu x, tako da možemo primijeniti pravila za množenje i dijeljenje stepena sa istom osnovom.

Prilikom množenja stepena sa istom osnovom, pokazatelji se sabiraju:

$C = x^5 \cdot x^3 : x^4 = x^8 : x^4$.

Prilikom dijeljenja stepena sa istom osnovom, pokazatelji se oduzimaju:

$C = x^8 : x^4 = x^4$.

Nakon pojednostavljenja, za koncentraciju rastvora dobijamo $C = x^4$.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Pomnoži stepene: a) $6^5 \cdot 6^6$, b) $q^3 \cdot q^{42} \cdot q^2$, c) $t^4 \cdot t^1 \cdot t^2$.

2. Podijeli stepene: a) $2^9 : 2^7$, b) $\frac{x^8}{x^3}$, c) $y^{17} : y^6$, č) $(a-3b)^{19} : (a-3b)^{12}$.

3. Zapiši proizvod u obliku stepena:
   a) $5^4 \cdot (-5)^6$, b) $-x \cdot x^2 \cdot (-x)^3$, c) $(3-a)^2 \cdot (a-3)^6$.

4. Zapiši izraz u obliku stepena: a) $2^{41} - 2^{40} - 2^{39}$, b) $3^{51} : (2 \cdot 3^{46} + 7 \cdot 3^{46})$.

5. Uprosti – pojednostavi izraz: a) $15x^8 \cdot 3x^2$, b) $32y^4 : 8y^2$, c) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$, č) $(y^7 + 2y^2z) : y$

6. Izračunaj vrijednost izraza: a) $(7^4 \cdot 7^2) : 7^5$, b) $\frac{3^6 \cdot 3^{12}}{27 \cdot 3^{14}}$, c) $\frac{2^{12}}{2^6 \cdot 2^3} : \frac{16 \cdot 2^3}{(2^3 : 4) \cdot 2^4}$.

7. Izračunaj: a) $x^5 \cdot x^2$, za $x = -2$ i $x = 2$, b) $y^7 : y^4$, za $y = -3$ i $y = 3$.

8. Za koju vrijednost n je tačna jednačina:
   a) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+n}$, b) $a^3 \cdot a^4 = a^{n+2}$, c) $4^5 : 4^3 = 4^{5-n}$, č) $(x+1)^8 : (x+1)^n = (x+1)^2$?

9. Broj bakterija u populaciji bakterija udvostručuje se svakih 30 minuta. Koliko će bakterija biti u populaciji poslije 3 sata, ako je na početku bilo 4 bakterije?

ZADACI ZA PONAVLJANJE I UTVRĐIVANJE

1. U skupu $A = \{2, 4, 8, 10\}$ data je relacija R: x je 2 puta veće od y.
Predstavi relaciju:

a) u tabelarnom obliku, b) u opisnom obliku, c) grafom.

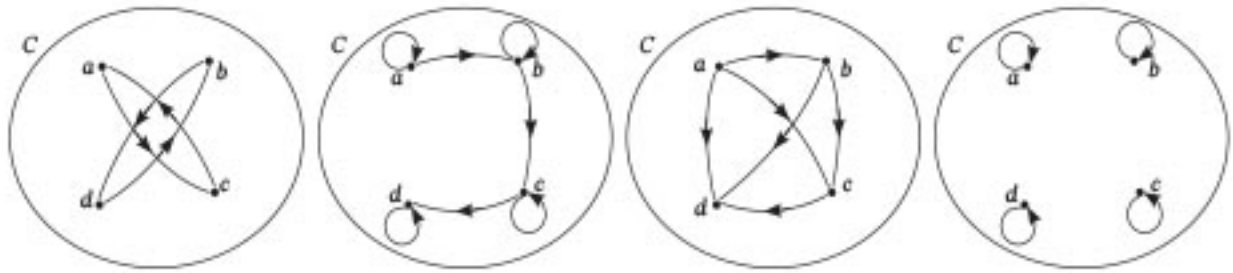
2. Za svaki pismeni test iz matematike, Mila je učila različit broj sati. Stavila je u relaciju sate učenja sa brojem osvojenih poena. Podaci su dati u tabeli.

dan u sedmici	vrijeme učenja (u satima)	osvojeni poeni
ponedjeljak	1 h	60
utorak	2 h	70
srijeda	1,5 h	65
četvrtak	3 h	85
petak	2,5 h	75

Objasni vezu između vremena učenja i osvojenih poena. Predstavi ovako određenu relaciju na sljedeći način: a) grafom, b) tabelarno.

3. Koje od relacija R_1, R_2, R_3 i R_4 u skupu $C = \{a, b, c, d\}$ na slici 1 su:

a) refleksivne, b) simetrične, c) antisimetrične, d) tranzitivne?



Relacija R_1 Relacija R_2 Relacija R_3 Relacija R_4

crtež 1

4. U skupu učenika iz VIII razreda, date su relacije:
R_1: „... ima isto prezime sa ...“ i
R_2: „... ima ime manje dužine od ...“.

a) Bez predstavljanja relacija grafom, provjeri svojstva: refleksivnost, simetriju, antisimetriju i tranzitivnost.

b) Koja od njih je relacija ekvivalencije, a koja relacija podređivanja?

5. U sportskoj sekciji, učenici razmjenjuju opremu za vježbanje.
Poznato je da je:
Damjan pozajmio loptu Emi; Ema je pozajmila konopac za vježbanje Luki;
Luka je pozajmio obruč Mili; Mila je pozajmila konopac za vježbanje Damjanu.

a) Predstavi relaciju R_1: „... pozajmio/la je opremu ...“, među učenicima na tabelaran način i grafom.

b) Provjeri da li je relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

c) Da li je relacija R_2: „... može da dobije rekvizit nizom pozajmljivanja od ...“ (na primjer, ako je Damjan pozajmio Emi, a Ema Luki, onda Damjan indirektno može da dobije rekvizit od Luke) relacija ekvivalencije?

6. Navedi primjer koji zadovoljava iskaz:

a) Svi prirodni brojevi su cijeli brojevi, ali svi cijeli brojevi nisu nužno prirodni brojevi.
b) Svi cijeli brojevi su racionalni brojevi, ali svi racionalni brojevi nisu nužno cijeli brojevi.

7. Napiši ponavljajući decimalni broj razlomkom:

a) 0,(9); b) 0,(143); c) 3,1(5); d) 3,45(67); ć) 80,23(54).

8. U kanisteru se nalazi 3.(4) *l* vode. Zapiši količinu vode u litrima razlomkom.

9. U prodavnici, *l* mlijeka košta 1,2(5) €.

a) Zapiši cijenu mlijeka razlomkom.
b) Koliko će Astrit platiti za 5 *l* mlijeka?
c) Astrit ima ograničen budžet od 10 €. Koliko litara mlijeka može da kupi da bi maksimalno iskoristila svoj budžet?

10. U umjetničkoj radionici, 0,4 od ukupnih boja je crvena, $\frac{3}{10}$ je plava boja i 30% je žuta boja.

a) Koja je boja najviše zastupljena?
b) Napravi tabelu u kojoj ćeš svaku količinu boje zapisati razlomkom, decimalnim brojem i procentom.

11. U nekom eksperimentu napravljen je rastvor. 80 g soli rastvori se u 400 ml vode. Zatim se doda još 100 ml vode i još 40 g soli.

a) Izračunaj procenat soli u početnom rastvoru.
b) Izračunaj novi procenat soli nakon dodavanja vode i soli.
c) Da li se koncentracija soli povećala ili smanjila i za koliko procenata?
d) Izrazi novu koncentraciju kao razlomak od ukupnog rastvora.

12. Jedan košarkaš na početku sezone postiže prosječno 20 poena po utakmici. U drugoj polovini sezone povećava svoju efikasnost za 25%, a u posljednjem dijelu sezone smanjuje je za 10% od te povećane vrijednosti.
Koliko poena postiže u prosjeku na kraju sezone?

13. Pojednostavi – uprosti razmjeru:

a) 0,25 m : 75 cm : 0,5 dm, b) 3 kg : 0,75 kg : 250 g, c) 3 *l* : 1200 ml : 0,6 l.

14. Milan putuje od kuće do škole za:

1 sat i 14 minuta, ako ide pješice,
30 minuta, ako vozi bicikl,
18 minuta, ako koristi javni prevoz.

Zapiši i pojednostavi razmjeru vremena: ide pješice prema vozi bicikl
prema koristi javni prevoz.

15. Unutrašnji uglovi jednog četverougla su u razmjeri 7 : 3 : 5 : 3.
Izračunaj veličinu najvećeg ugla.

16. Da bi se dobilo čokoladno mlijeko, razmjera mlijeka i vode prema otopljenoj čokoladi treba da bude 3 : 2 : 1.
Poznato je da Igor ima 15 *l* mlijeka.

a) Koliko litara vode i koliko litara otopljene čokolade mu je potrebno?
b) Kolika je ukupna količina čokoladnog mlijeka?

17. Nina treba da pomjeri 30 kocki na rastojanje od 5 m. Nina pomjera jednu kocku za 6 sekundi. Koliko joj je vremena potrebno da pomjeri 30 kocki ako pomjera:

a) 2 kocke odjednom, b) 3 kocke odjednom?

18. Mensur vozi autobus brzinom od 80 km/h i prelazi svoju rutu za 5 h i 20 min. Tomislav vozi automobil brzinom od 100 km/h i prelazi svoju rutu za 3 h i 10 min. Koji od njih je prešao duži put?

19. zračunaj:

a) $\frac{1}{2}$ od 36, b) $\frac{1}{4}$ od 72, c) $\frac{1}{2}$ od 36, d) 0,1 ·180.

20. U posudi je bilo $1\frac{1}{4}$ kg brašna. Egzona je potrošila 0,7 kg za kolače. Zatim je Ilir dodao još 1,2 kg brašna. Koliko brašna sada ima u posudi?

21. Hemičar priprema rastvor u laboratoriji. U čaši je bilo 2,5 *l* rastvora.

Prilikom zagrijavanja, 0,75 *l* je isparilo, a hemičar je zatim dodao još $1\frac{1}{4}$ *l* svježeg rastvora.

a) Kolika je ukupna količina rastvora u čaši nakon svih promjena?
b) Ako hemičar želi da ima 4 *l* rastvora, koliko još litara treba da doda ili oduzme?

22. Na času geografije, đaci proučavaju rijeke i njihove prosječne protočne količine (protok). Rijeka A ima prosječan protok od 320,5 m^3/s, a rijeka B ima prosječan protok od 145,25 m^3/s. Inženjeri planiraju da izgrade zajedničku branu. Odlučili su da u branu ide $\frac{3}{4}$ od protoka rijeke A i 85% od protoka rijeke B.

a) Koliki će biti novi protok rijeke A?
b) Koliki će biti novi protok rijeke B?
c) Koliki će biti ukupan protok koji će se uliti u branu sa obje rijeke?
d) Za koliko je veći protok rijeke A u odnosu na rijeku B poslije promjena?

23. Izračunaj na najlakši način:

a) $\left(5\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}-6\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{5}$, b) $-4\cdot\frac{-5}{3}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot(-3)$.

24. Izračunaj vrijednost izraza: $\left[\left(5\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}+1\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{36}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{13}\right)\right]-[(0,5-2,5)]\cdot\frac{1}{2}$.

25. Jedna prodavnica voća nabavila je 25 kg jabuka po cijeni od 1,8 € po kilogramu. Za transport i pakovanje plaćeno je dodatnih 12,5 €. Nakon toga prodavnica je prodala $\frac{3}{5}$ jabuka po cijeni od 2,4 € po kilogramu, a preostale je prodala sa popustom od 0,3 €/kg od prvobitne cijene. Koliki je profit ostvarila prodavnica nakon prodaje jabuka?

26. Pretvori u prost razlomak:

a) $\dfrac{1:2\frac{1}{15}}{3\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{3}}:\dfrac{4\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{13}}{5:1\frac{7}{8}}$,

b) $\dfrac{4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{23}}{6\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot 5\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot 7}{7\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{31}}$.

27. Koliko puta će se točak bicikla okrenuti na stazi od 51 m, ako je obim točka $1\frac{1}{4}$m m?

28. Alge u jednom akvarijumu udvostručuju se svakih 6 sati. Koliko će algi biti u akvarijumu poslije 24 sata, ako je na početku bilo 5 algi?

29. Jedan robot kreće iz koordinatnog početka po x-osi. Pri svakom pokretu udvostručuje se rastojanje od koordinatnog početka i mijenja smjer naizmjenično zdesna nalijevo. Njegov položaj nakon n pokreta iznosi $(-2)^n$ metara.

a) Na kojoj poziciji je robot nakon prvog pokretanja, a na kojoj poziciji je nakon drugog pokretanja?

b) Poslije koliko pokretanja će robot biti lijevo od koordinatnog početka, na rastojanju od 8 m?

30. Procijeni na jednu decimalu vrijednost: a) $\sqrt{51}$, b) $\sqrt[3]{100}$.
Zatim, provjeri svoju procjenu pomoću kalkulatora.

31. Naučnici istražuju malu metalnu kocku koja se koristi kao dio baterija za električne automobile. Kocka ima zapreminu od 216 cm³.

a) Kolika je dužina stranice metalne kocke?

b) Kolika je površina metalne kocke?

c) U laboratoriji se prave minijaturne kopije iste kocke sa stranicom koja je 6 puta manja. Kolika je zapremina minijaturne kocke?

32. Izračunaj vrijednost izraza:

a) $3\cdot 5^2+4^3-5\cdot 7^3$,

b) $(-2)(-3)(-4)^2-(-1)^5(-2)^2$,

c) $100\cdot(-2)^3+2\cdot\sqrt{169}\cdot(-3)^3-0{,}3\sqrt[3]{27}$,

d) $\left(2^3+\sqrt{256}\right):\left((-3)^5-\sqrt[3]{125}\right)$.

Provjeri kalkulatorom.

33. U tabeli su data rastojanja planeta od Sunca.

a) Zapiši rastojanja kao proizvod prirodnog broja i stepena sa osnovom 10.

b) Poredaj rastojanja od najmanjeg do najvećeg.

planeta	rastojanje-udaljenost do Sunca u km
Merkur	58 000 000
Venera	108 000 000
Mars	228 000 000
Zemlja	150 000 000
Jupiter	780 000 000
Saturn	1 430 000 000
Uran	2 870 000 000
Neptun	4 500 000 000

34. Godišnji budžet jedne zemlje iznosi 87 456 000 000 denara. Zaokruži ga na najbližu decimalnu jedinicu 10^9.

35. Pojednostavi izraz:

a) $(x^{32} : x^6) \cdot (x^7 : x^3) \cdot (x^7 : x^3 \cdot x^9)$, b) $\frac{a^7 \cdot a^8 : a^3}{3a^5}$.

36. Jedna fabrika proizvodi metalne kocke. Svaka kocka ima dužinu ivice 2 cm.

a) Napiši to u obliku stepena, a zatim izračunaj površinu dvije strane kocke.

b) Napiši to u stepenom obliku, a zatim izračunaj površinu četiri strane kocke.



Tema 2:

GEOMETRIJA

Rezultati učenja:

Pri izučavanju ove teme moći ćeš da:

- Rješavaš probleme koristeći: uglove sa međusobno paralelnim kracima, uglove sa međusobno normalnim kracima, periferne i centralne uglove nad istim kružnim lukom, dijelove kruga i kruga.
- Primjenjuješ podudarnost trougla u rješavanju problema iz svakodnevnih konteksta.
- Koristiš karakteristike i svojstva 2D oblika (trougla i četverougla) u rješavanju problema sa konstrukcijama i Pitagorinom teoremom.
- Demonstriraš razumijevanje poliedra, pravilnog poliedra i odnosa između broja strana, ivica i tjemena u poliedrima.
- Transformišeš 2D oblike kombinovanjem transformacija osne simetrije, translacije i rotacije.

1. UGLOVI SA MEĐUSOBNO PARALELNIM KRACIMA

Uglovi sa međusobno paralelnim kracima

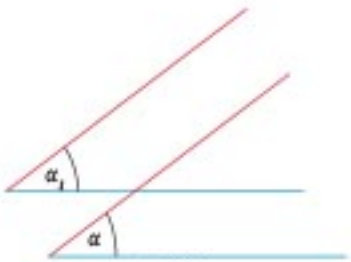
Aktivnost

1. Na parkingu su nacrtane paralelne linije koje označavaju parking mjesta kao na slici 1. Kakav je uzajamni položaj odgovarajućih krakova uglova 1 i 2?

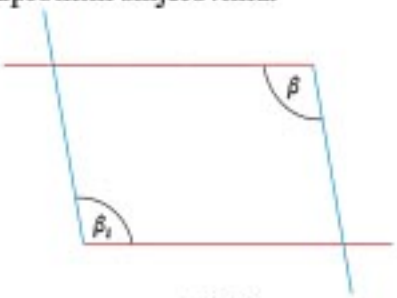


slika 1

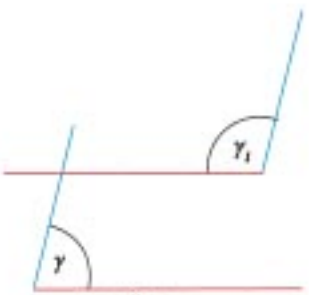
Uglovi α i α_1 na slici 1a imaju međusobno paralelne krake sa istim smjerovima.
Uglovi β i β_1 na slici 1b imaju međusobno paralelne krake sa suprotnim smjerovima.
Uglovi γ i γ_1 na slici 1c imaju međusobno paralelne krake. U ovom slučaju, jedan par krakova je sa istim smjerovima, a drugi par je sa suprotnim smjerovima.



crtež 1a



crtež 1b



crtež 1c

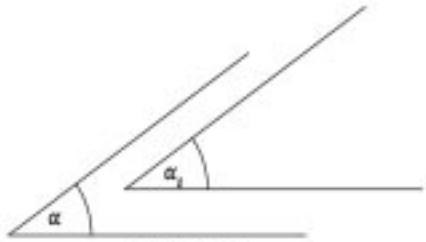
Parovi uglova α i α_1, β i β_1, γ i γ_1 primjeri su uglova **sa međusobno paralelnim kracima.**

Zadatak 1

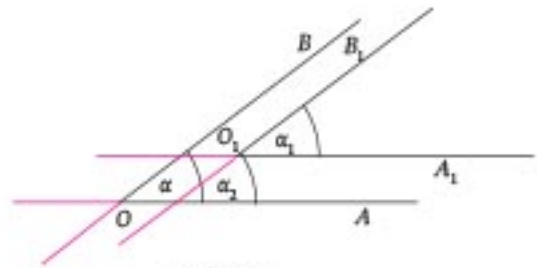
Nacrtaj dva ugla sa međusobno paralelnim kracima:
a) sa istim smjerovima, b) sa suprotnim smjerovima,
c) jedan par krakova je sa istim smjerovima, a drugi par je sa suprotnim smjerovima.

Primjer 1

Na crtežu 2a, uglovi α i α_1 imaju međusobno paralelne krake, sa istim pravcima. Pažljivo ih izmjeri, a zatim uporedi njihove veličine. Šta primjećuješ? Možeš li doći do istog zaključka bez mjerenja?



crtež 2a

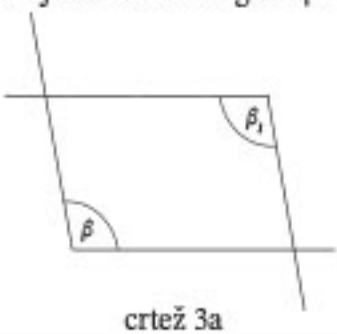


crtež 2b

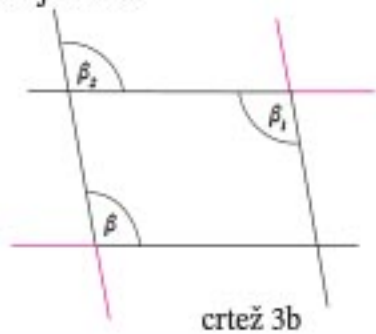
Nakon mjerenja, sigurno si utvrdio/la da su dati uglovi jednaki, odnosno da je $\alpha = \alpha_1$.
Da bismo bez mjerenja utvrdili da je $\alpha = \alpha_1$, produžit ćemo krake uglova do pravih (crtež 2b). Tada primjećujemo da:
$OB \parallel O_1B_1$ i OA su transverzale, pa je $\alpha = \alpha_2$ (kao podudarni uglovi);
$OA \parallel O_1A_1$ i O_1B_1 su transverzale, pa je $\alpha_2 = \alpha_1$ (kao podudarni uglovi);
Од $\alpha = \alpha_2$ i $\alpha_2 = \alpha_1$ dobijamo da je $\alpha = \alpha_1$.

Primjer 2

Objasni zašto su uglovi β i β_1 na crtežu 3a jednaki.



crtež 3a

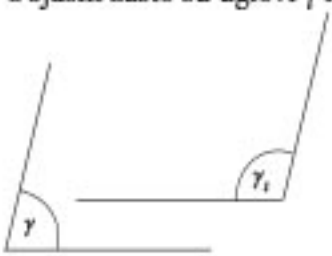


crtež 3b

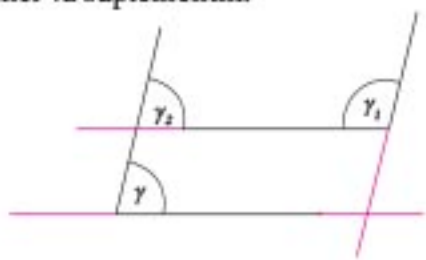
Uglovi β i β_2 imaju međusobno paralelne krake sa suprotnim smjerovima. Ako produžimo krake uglova do pravih (crtež 3b), primjećujemo da je:
$\beta = \beta_2$ (kao podudarni uglovi) i $\beta_2 = \beta_1$ (kao naizmjenični uglovi).
Iz $\beta = \beta_2$ i $\beta_2 = \beta_1$ slijedi da je $\beta = \beta_1$.

Primjer 3

Objasni zašto su uglovi γ i γ_1 na slici 4a suplementni.



crtež 4a



crtež 4b

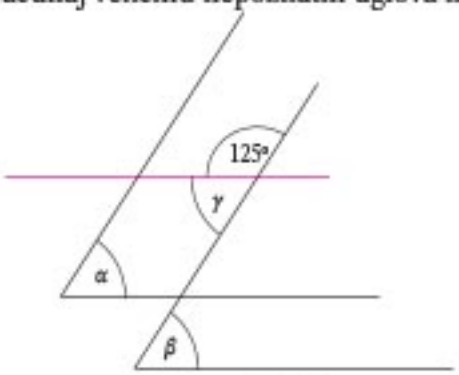
Uglovi γ i γ_1 imaju međusobno paralelne krake, jedan par krakova je sa istim pravcima, a drugi par krakova je sa suprotnim pravcima.

Ako produžimo krake uglova do pravih linija (crtež 4b), primjećujemo da:
$\gamma = \gamma_2$ (kao podudarni uglovi) i $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ (su suplementni uglovi kao suprotni uglovi).
Iz $\gamma = \gamma_2$ i $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ dobijamo da je $\gamma + \gamma_1 = 180°$, tj. γ i γ_1 su suplementni uglovi.

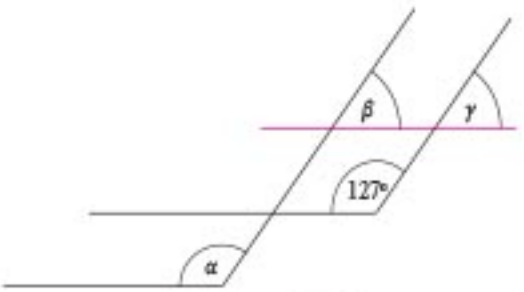
Uglovi sa međusobno paralelnim stranicama su:
- jednaki, ako su dva para krakova u istom smjeru ili u suprotnim smjerovima,
- komplementarni, ako je jedan par krakova u istom smjeru, a drugi par u suprotnom smjeru.

Zadatak 2

Izračunaj veličinu nepoznatih uglova na crtežu 5a i crtežu 5b.



crtež 5a



crtež 5b

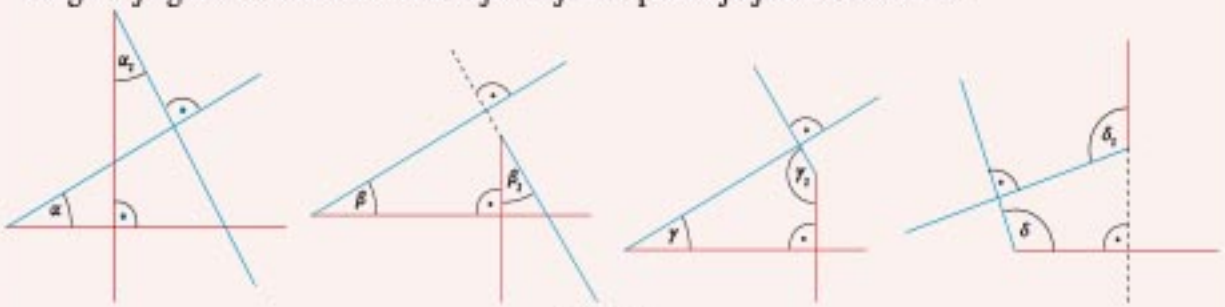
Zadatak 3

Plan grada prikazuje dvije paralelne ulice: ulicu *A* i ulicu B. Ulica Dijagonala siječe obje ulice i na raskrsnici sa ulicom *A* zahvata ugao od 120°.
Na raskrsnici ulice *B* i Dijagonale formiraju se četiri ugla.
a) Nacrtaj dio plana sa tri ulice i označi uglove.
b) Izračunaj veličinu uglova na raskrsnici sa ulicom *B* i Dijagonalom.

Uglovi sa međusobno normalnim stranicama

Aktivnost

Razgledaj uglove na crtežu 6. Kakav je uzajamni položaj njihovih krakova?



crtež 6

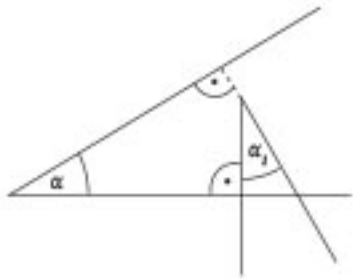
Precrtaj i popuni tabelu.

parovi uglova	veličina uglova	poređenje uglova (jednakih ili različitih)	zbir uglova
α i α_1			
β i β_1			
γ i γ_1			
δ i δ_1			

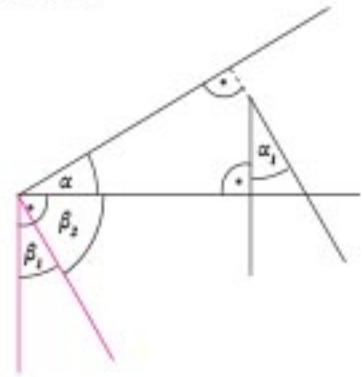
Parovi uglova α i α_1, β i β_1, γ i γ_1, δ i δ_1 razgledani u aktivnosti primjeri su uglova sa **međusobno normalnim kracima**.

Da bismo utvrdili vezu između veličine dva ugla sa međusobno normalnim kracima, razmotrit ćemo sljedeća dva slučaja:

1. crtežu 7a, uglovi α i α_1 imaju međusobno normalne krake.



crtež 7a



crtež 7b

Na crtežu 7b, ugao β_1 nacrtan je sa tjemenom poput ugla α, tako da α_1 i β_1 imaju međusobno paralelne krake sa istim pravcima. Primjećujemo da:

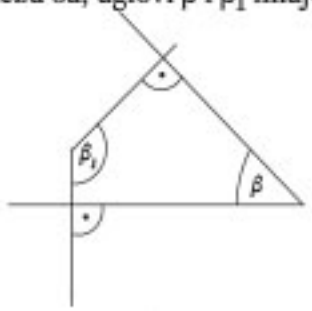
$\alpha_1 = \beta_1$ (kao uglovi sa međusobno paralelnim kracima i istim pravcima).

$\alpha + \beta_2 = 90°$ i $\beta_1 + \beta_2 = 90°$;

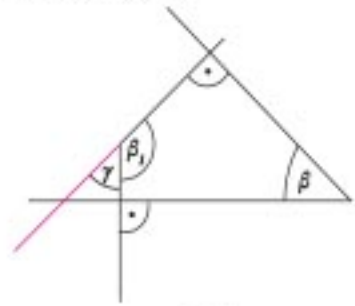
Iz $\alpha = 90° - \beta_2$ i $\beta_1 = 90° - \beta_2$ dobijamo da je $\alpha = \beta_1$;

Iz $\alpha = \beta_1$ i $\alpha_1 = \beta_1$ dobijamo da je $\alpha = \alpha_1$.

2. Na crtežu 8a, uglovi β i β_1 imaju međusobno normalne krake.



crtež 8a



crtež 8b

Na slici 8b, ugao γ nacrtan je sa tjemenom kao ugao β_1, tako da γ i β imaju međusobno normalne krake. Primjećujemo da:

$\beta = \gamma$ (uglovi sa međusobno normalnim kracima, kao u prethodnom slučaju),

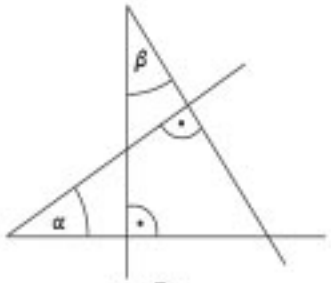
$\gamma + \beta_1 = 180°$;

Iz $\beta = \gamma$ i $\gamma + \beta_1 = 180°$ dobijamo da je $\beta + \beta_1 = 180°$.

Uglovi sa međusobno normalnim kracima su ili identični ili komplementarni.

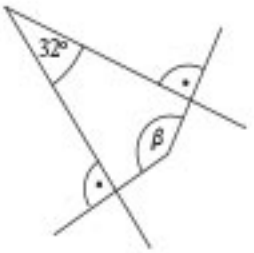
Zadatak 4

a) Kakvi su međusobno uglovi α i ugao β na crtežu 9?



crtež 9

b) Izračunaj veličinu ugla β na crtežu 10.



crtež 10

Zadatak 5

Uglovi α i β su uglovi sa međusobno normalnim kracima. Ako je $\alpha = 151°$, šta onda može biti ugao β? Nacrtaj.

Zadatak 6

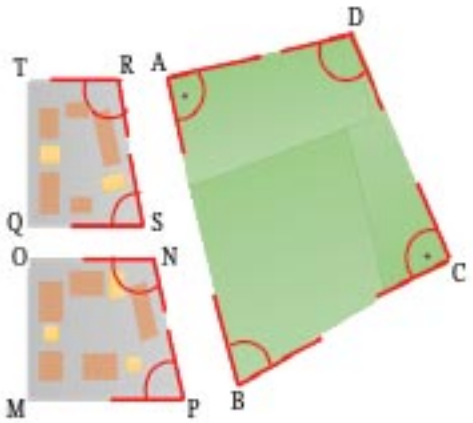
U dvorištu su ograda i staza postavljene tako da se sijeku pod uglom od 60°. Vlasnik je postavio klupu tako da je njena duža ivica normalna na ogradu. Zatim je, pored toga, zasadio cvjetnu leju normalnu na stazu.

a) Nacrtaj skicu ograde, staze, klupe i cvjetne leje.

b) Koliki je ugao između klupe i cvjetne leje?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Na slici 2 prikazan je plan dijela naselja sa kućama i igralištem.



a) Prepiši i dopuni znakovima:
„||“ – „... je paralelan sa ...“ i
„⊥“ – „... je normalan na ...“:
PM___ SQ, PN___ SR, DA___ AB,
DC___ CB, RT___ NO.

b) Napiši parove uglova sa međusobno paralelnim kracima.

c) Napiši parove uglova sa međusobno normalnim kracima.

č) Ako je $\measuredangle MPN = 65°$, izračunaj veličinu $\measuredangle ONP$, $\measuredangle QSR$ i $\measuredangle SRT$.

ć) Ako je $\measuredangle ADC = 110°$, izračunajte veličinu $\measuredangle ABC$.

2. Nacrtaj proizvoljan oštar ugao α, proizvoljan tup ugao β i tačke S i P, u njihovoj unutrašnjoj oblasti, odgovarajuće. Nacrtaj ugao:

a) ASB čiji su kraci paralelni sa kracima ugla α, sa istim smjerovima,

b) CPD čiji su kraci paralelni sa kracima ugla β, sa suprotnim smjerovima.

3. Nacrtaj uglove AOB i COD i tačke T i Q u njihovoj unutrašnjoj oblasti, odgovarajuće. Nacrtaj ugao:
   a) ETF čiji su kraci paralelni sa kracima ugla AOB, krak TE ima isti smjer kao krak OA, a krak TF ima suprotan smjer od OB.
   b) GQH čiji su kraci paralelni sa kracima ugla COD, krak QH ima suprotan smjer od kraka OC, a krak QG ima isti smjer od OD.

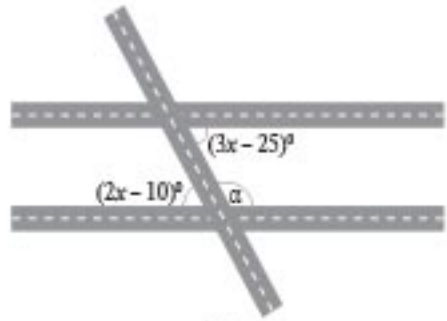
4. Nacrtaj ugao α i u njegovoj unutrašnjosti tačku M. Zatim nacrtaj ugao sa tjemenom u tački M i kracima koji su međusobno normalni na krake ugla α. Koliko takvih uglova ima?

5. Jedan od dva ugla sa međusobno paralelnim kracima je 56°. Koliko stepeni ima drugi ugao ako su:
   a) njihovi kraci u istom smjeru, b) njihovi kraci u suprotnim smjerovima,
   c) jedan par krakova je u istom smjeru, a drugi par je u suprotnim smjerovima?

6. Nađi uglove α i β sa međusobno paralelnim kracima, ako:
   a) je njihov zbir 154°, b) je njihova razlika 76°.

7. Nađi uglove α i β sa međusobno normalnim kracima, ako: a) $\alpha = 125° + \beta$, b) $\alpha = 3\beta$.

8. Dvije paralelne ulice presječene su trećom ulicom kao na slici 3. Nađi ugao α.



slika 3

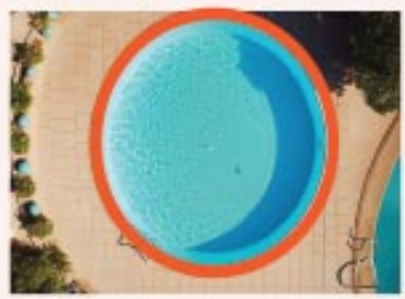
9. U jednom gradu, ulice A i B sijeku se pod uglom od 55°. Na planu, urbanista crta poprečnu ulicu C, tako da je C normalna na A, i ulicu D, tako da je D normalna na B.
   a) Nacrtaj skicu ulica A, B, C i D.
   b) Koliki je ugao između ulica C i D?
   c) Koje vrste uglova su ugao između A i B i ugao između C i D?

2. KRUŽNICA, KRUG I NJIHOVI DIJELOVI

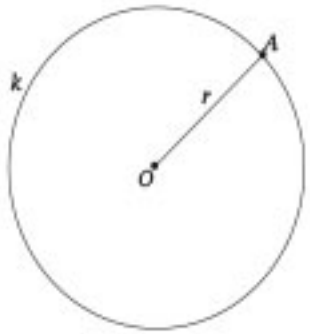
Kružnica i krug

Aktivnost

Pojmovi kružnice i kruga među najvažnijim su pojmovima u geometriji.
a) Na slici 1 odredi šta je kružnica, a šta je krug.
b) Koja je razlika između ova dva oblika?


slika 1

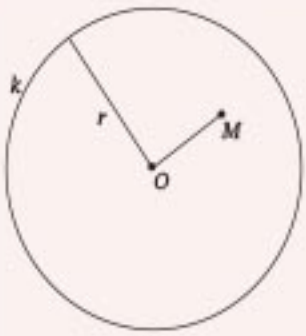
Podsjetimo se da je **kružnica** skup svih tačaka A u ravni koje su na jednakoj udaljenosti r od date tačke O u ravni (crtež 1).
Dužina $r = \overline{OA}$ naziva se poluprečnik kružnice.
Međutim, poluprečnik kružnice može da označava duž koja povezuje centar sa proizvoljnom tačkom kružnice.
Kružnica sa centrom u tački O i poluprečnikom r označava se sa $k(O, r)$ ili samo sa k.



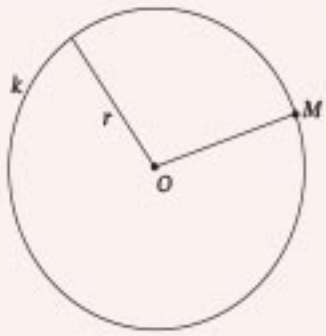
crtež 1

Aktivnost

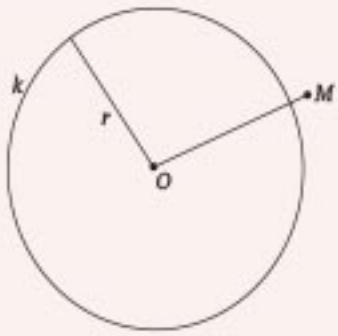
Koji je položaj tačke M u odnosu na kružnicu k, ako je njeno rastojanje do centra O kružnice:
a) manje od r (crtež 2a) b) jednako r (crtež 2b) c) veće od r (crtež 2c).



crtež 2a

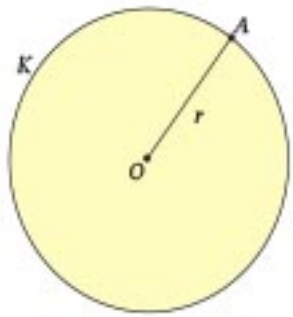


crtež 2b



crtež 2c

Podsjetimo se da je **krug** skup svih tačaka A u ravni koje su na rastojanju manjem ili jednakom r od date tačke O u ravni (crtež 3).
Svaki krug sastoji se od jedne kružnice i njene unutrašnjosti.
Ako je tačka A na kružnici, onda se dužina $r = \overline{OA}$ naziva poluprečnik kruga.
Krug sa centrom u tački O i poluprečnikom r označen je sa K(O, r) ili samo sa K.



crtež 3

Zadatak 1

Nacrtaj:
a) kružnicu sa proizvoljnim centrom i poluprečnikom 2 cm,
b) krug sa proizvoljnim centrom i poluprečnikom 3 cm,
c) dvije koncentrične kružnice sa proizvoljnim centrom i poluprečnikom 3 cm i 4 cm.

Kružni prsten

Aktivnost

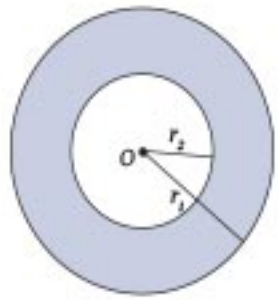
Na slici 2 dato je nekoliko predmeta iz tvoje okoline. Da li vidiš 2D oblik koji se pojavljuje kod svih predmeta? Opiši ga riječima.



slika 2

Kružni prsten je dio ravni ograničen sa dvije koncentrične kružnice.

Crtež 4 prikazuje kružni prsten ograničen sa dvije koncentrične kružnice sa centrom u tački O i poluprečnicima r_1 i r_2. Dvije koncentrične kružnice pripadaju kružnom prstenu.



crtež 4

Zadatak 2

Nacrtaj dvije koncentrične kružnice sa poluprečnicima 3 cm i 5 cm, a zatim oboji kružni prsten koji je njima određen.

Zadatak 3

Sportsko igralište ima stazu za trčanje u obliku kružnog prstena definisanog sa kružnicama sa poluprečnicima 10 m i 12 m.

a) Nacrtaj skicu staze i oboji je.

b) Kolika je širina staze?

Kružni odsječak

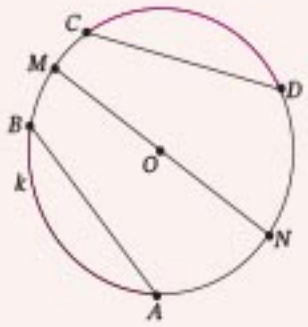
Aktivnost

1. a) Šta je **tetiva** kružnice? Navedi tetive u kružnici k datoj na crtežu 5.

b) Šta je **prečnik** kružnice? Navedi prečnik date kružnice.

c) Šta je **kružni luk** u kružnici? Navedi kružne lukove koji odgovaraju tetivama AB i CD, odgovarajuće. Kako se naziva kružni luk koji odgovara prečniku MN?

č) Navedi tetive koje odgovaraju kružnim lukovima $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{CD}$, odgovarajuće. Koja tetiva odgovara kružnom luku $\overset{\frown}{MN}$?



crtež 5

2. Opiši 2D oblik koji se pojavljuje kod svih predmeta na slici 3.

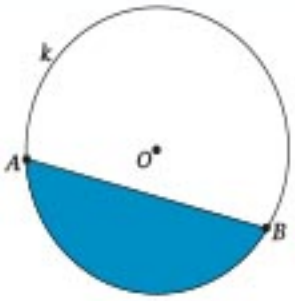


slika 3

Kružni odsječak je dio kruga ograničen jednom tetivom i kružnim lukom koji odgovara toj tetivi.
Ako je tetiva prečnik kruga, onda se kružni isječak naziva **polukrug**.

Crtež 6 prikazuje kružni odsječak koji tetiva AB odsijeca od kruga.

Tetiva AB i kružni luk $\overset{\frown}{AB}$ pripadaju odsječku.



crtež 6

Zadatak 4

Nacrtaj krug poluprečnika 4 cm i tetivu MN dužine 6 cm. Zatim oboji manji kružni odsječak određen tetivom MN i kružnim lukom $\overset{\frown}{MN}$ koji odgovara tetivi.

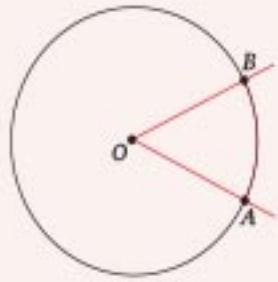
Zadatak 5

Marko pravi dekoraciju za školsku priredbu. Isjekao je dva komada od kruga, jedan od kruga zelene boje, a drugi od kruga crvene boje. U kojem slučaju Marko može da sastavi krug od isječenih dijelova? Objasni svoj odgovor.

Kružni isječak

Aktivnost

1. Kako se naziva ugao AOB na crtežu 7?



crtež 7

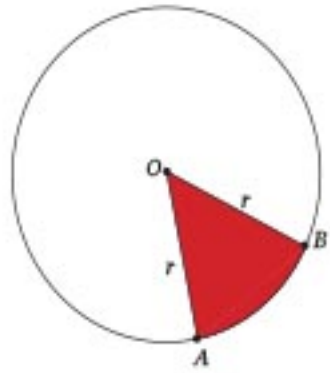
2. Opiši 2D oblik koji se pojavljuje na svim objektima na crtežu 4.



slika 4

Kružni isječak je dio kruga ograničen sa dva njegova poluprečnika i kružnim lukom koji je između njih obuhvaćen.

Na crtežu 8 prikazan je kružni presjek ograničen sa dva poluprečnika OA i OB i kružnim lukom $\overset{\frown}{AB}$ koji je obuhvaćen njima. Poluprečnici OA i OB i kružni luk $\overset{\frown}{AB}$ pripadaju kružnom presjeku. Svakom centralnom uglu odgovara jedan kružni isječak i, obrnuto, svakom kružnom isječku odgovara jedan centralni ugao.



crtež 8

Zadatak 6

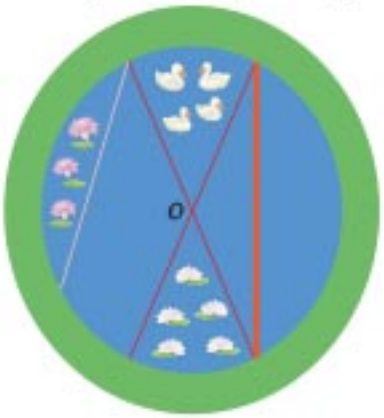
Nacrtaj krug poluprečnika 3 cm, a zatim oboji kružni isječak definisan sa dva njegova poluprečnika i kružnim lukom koji odgovara centralnom uglu od 90°.

Zadatak 7

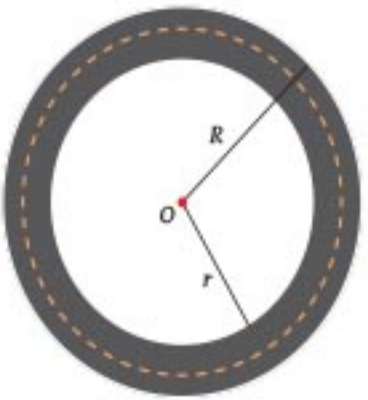
Pica ima oblik kruga sa poluprečnikom $r = 15$ cm. Pica je isječena na 8 jednakih dijelova.
a) Koji geometrijski oblik ima parče pice?
b) Koliki je centralni ugao parčeta pice?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Na parceli, u obliku kruga, nalazi se jezerce sa travnjakom oko njega i mostom preko jezerceta (slika 5).
   a) Kako se naziva dio kružne parcele koji je travnjak?
   b) Kako se naziva manji dio jezera podijeljen mostom?
   c) Kako se naziva dio jezera gdje se nalaze patke?
   č) Uporedi veličinu dijela sa patkama i dijela sa bijelim lotosima.
   ć) Koliko je kružnih odsječaka predstavljeno na slici jezera?
   đ) Koliko je kružnih isječaka predstavljeno na slici jezera?



slika 5

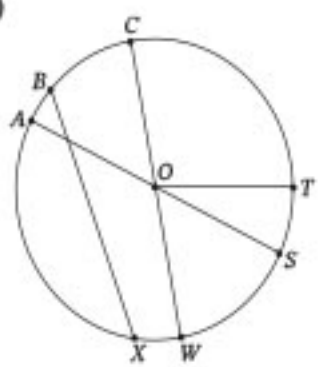


slika 6

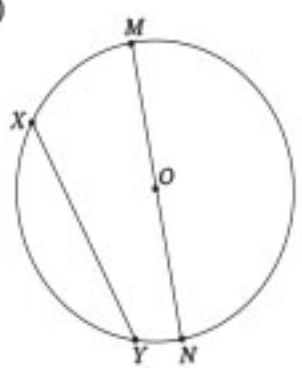
2. Koliko je širok kolovoz na kružnoj stazi na slici 6, ako je $R = 87{,}2$ m i $r = 82{,}7$ m?

3. Navedi sve kružne isječke koje vidiš na crtežu 9.

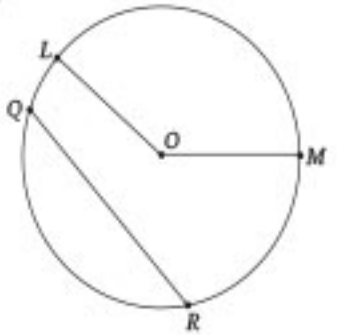
a)



b)



c)



crtež 9

4. Navedi sve kružne isječke koje vidiš na crtežu 9.

5. Nacrtaj:
   a) kružni prsten ograničen sa dvije koncentrične kružnice poluprečnika 2 cm i 5 cm,
   b) kružni isječak sa poluprečnikom 3 cm koji odgovara centralnom uglu od 120°,
   c) kružni odsječak sa poluprečnikom 4 cm koji odgovara centralnom uglu od 60°

6. Projektni zadatak

Od 4 pločice sa identičnim dizajnom, formiraju se 2 različite slike kao na slici 7.



slika 7

Nacrtaj date dizajne (slika 8) na kvadratnoj pločici sa stranom od 10 cm. Napravi najmanje 4 identične pločice od kartona i sastavi ih kao u primjeru. Pokušaj da ovo uradiš na više načina.

a)



b)



slika 8

3. PERIFERNI UGAO

Aktivnost

Ana se nalazi u centru kruga O. Ona vidi kružni luk između dva drveta pod uglom BOC. Ilir se nalazi u tački A kružnice.

a) Kako se zove ugao BOC?

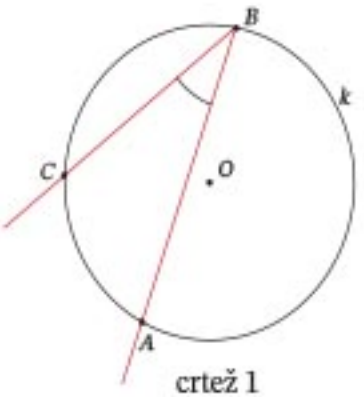
b) Koje će biti tjeme i stranice ugla pod kojim će vidjeti isti luk iz tačke A (slika 1)?



slika 1

Ugao čije je tjeme na kružnici, a kraci sijeku kružnicu naziva se **periferni ugao**.

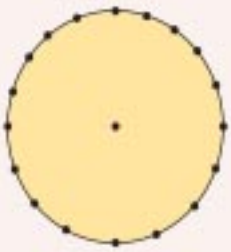
Na slici 1 data je kružnica k sa centrom O i uglom ABC čije tjeme leži na kružnici. Njegovi kraci sijeku kružni luk $\overset{\frown}{AC}$ na kružnici na kojem ne leži tjeme C.
Ugao ABC je periferni ugao iznad luka $\overset{\frown}{AC}$.
Za luk $\overset{\frown}{AC}$ koji leži u oblasti perifernog ugla ABC kažemo da **odgovara** perifernom uglu ABC.

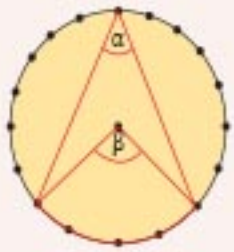


crtež 1

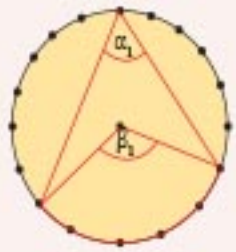
Aktivnost

Da bi lakše uočio/la veze između uglova u kružnici, napravi svoju „ugaonu kružnicu".
Potrebno ti je: komad kartona, stiropor, lenjir, gumena traka i oko 20 iglica sa kuglicama za pričvršćivanje papirnih materijala na stiropor.
Priprema: Na kartonu pomoću šestara nacrtaj krug poluprečnika od oko 10 cm.
Pričvrsti krug na stiropor, postavljajući iglice duž kružnice na približno istom rastojanju.
Postavi jednu iglicu u centar kruga (slika 2a). Postavi gumenu traku kao na slici 2b. Označi centralni i periferni ugao sa α i β, respektivno. Izmjeri uglove α i β lenjirom, a zatim uporedi njihove veličine. Promijeni luk ugaonog kruga i označi centralni i periferni ugao sa α_1 i β, odgovarajuće (slika 2c). Izmjeri i uporedi uglove α_1 i β_1. Ponovi postupak nekoliko puta mijenjajući luk ugaonog kruga. Šta možeš da zaključiš o veličini perifernog i centralnog ugla nad istim kružnim lukom?


crtež 2a



crtež 2b



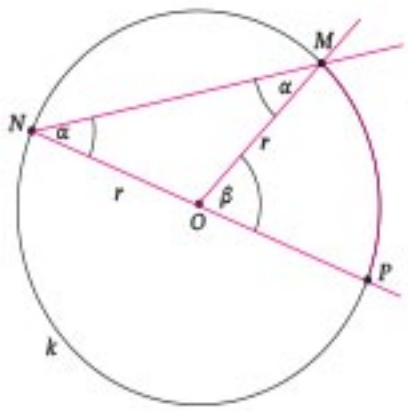
crtež 2c

Da bismo utvrdili vezu između veličine centralnog i veličine perifernog ugla nad istim kružnim lukom, razmotrit ćemo sljedeća tri slučaja:

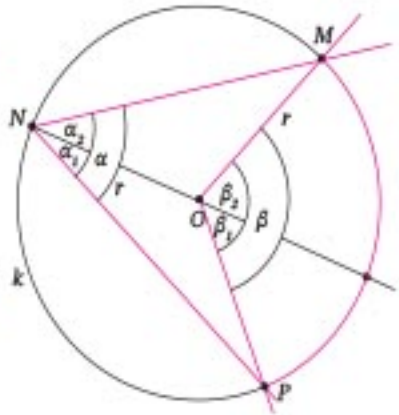
1. Centar kružnice leži na jednoj od kateta perifernog ugla (crtež2a). Trougao OMN je jednakokrak, tako da za njegov spoljašnji ugao β važi

$$2\alpha = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2},$$

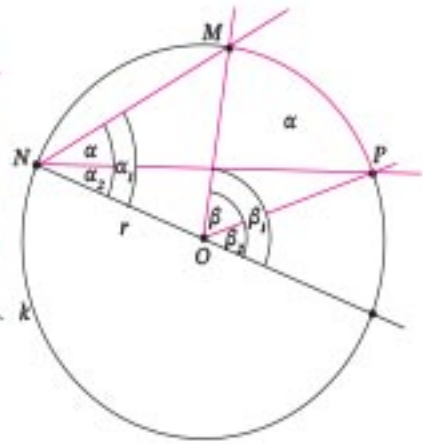
gdje je α ugao u osnovi trougla.



crtež 2a



crtež 2b



crtež 2c

2. Centar kružnice leži u dijelu perifernog ugla (crtež 2b). Prema crtežu nalazimo da je $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ i $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Tada je

$$2\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

3. Centar kružnice leži izvan oblasti perifernog ugla (crtež2c). Prema crtežu, nalazimo da je $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ i $\beta_1 - \beta_2 = \beta$. Tada je

$$2\alpha = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Veličina perifernog ugla nad datim lukom jednaka je polovini centralnog ugla nad istim lukom.

Primjer 1

Nađi periferni ugao koji je iznad istog kružnog luka sa centralnim uglom od:
a) 130°, b) 215°.

Označi sa α periferni ugao koji treba da izračunamo. Pošto je periferni ugao polovina centralnog ugla β iznad istog kružnog luka, dobijamo:

a) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$,

b) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{215^\circ}{2} = 107^\circ 30'$.

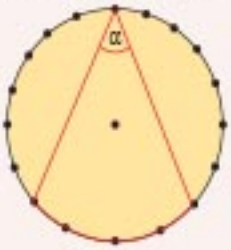
Zadatak 1

Nađi veličinu perifernog ugla nad lukom koji je $\frac{1}{6}$ kružnice.

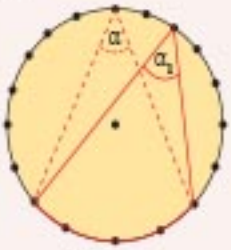
Aktivnost

Ponovo ćemo koristiti kružnicu ugla (slika 3a). Izmjeri ugao α. Pomjeri lastiš sa tjemena ugla α na drugu iglicu kružnice kao na slici 3b. Izmjeri dobijeni ugao α_1. Ponovi postupak još nekoliko puta pomjeranjem tjemena ugla.

Šta zaključuješ u vezi sa veličinom izmjerenih uglova?



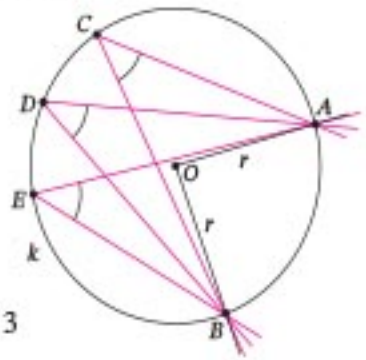
slika 3a



slika 3b

Ako si dobro izmjerio, sigurno si utvrdio da su periferni uglovi nad istim kružnim lukom koje si izmjerio/la međusobno jednaki. Do istog zaključka bi došao/la ako bi izmjerio/la i uporedio/la veličine perifernih uglova nad kružnim lukom AB u krugu k na slici 3.

Možemo da razmislimo na sljedeći način:
pošto je veličina svakog perifernog ugla nad istim kružnim lukom jednaka polovini centralnog ugla nad istim lukom, svi periferni uglovi nad tim kružnim lukom međusobno su jednaki.

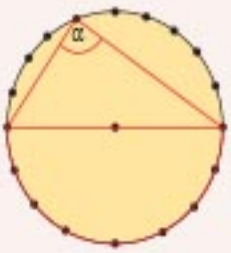


crtež 3

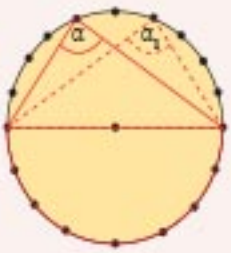
Svi periferni uglovi nad istim kružnim lukom u jednoj kružnici **međusobno su jednaki**.

Aktivnost

Postavi lastiš na ugaonu kružnicu tako da centralni ugao bude pravi ugao. Tada će periferni ugao biti iznad polukruga kao na slici 4a. Izmjeri ugao α (slika 4b). Pomjeri lastiš od tjemena ugla α do druge iglice iz kruga kao na crtežu. Izmjeri dobijeni ugao α_1. Ponovi postupak nekoliko puta pomjerajući tjeme ugla. Šta zaključuješ o veličini izmjerenih uglova?



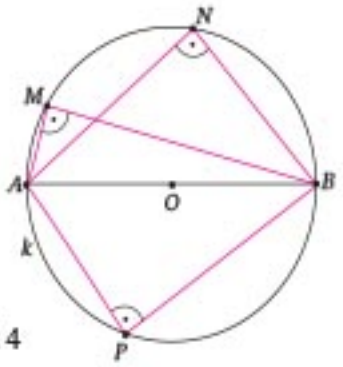
slika 4a



slika 4b

Ako si dobro mjerio/la, utvrdio/la si da su periferni uglovi koje si izmjerio/la iznad polukružnice pravi uglovi.

Do istog zaključka ćeš doći ako koristiš uglomjer za mjerenje i upoređivanje veličina perifernih uglova iznad centralnog ugla AOB kruga k na crtežu 4.
Možeš da razmisliš i na sljedeći način:
Pošto je mjera svakog perifernog ugla nad istim kružnim lukom jednaka polovini centralnog ugla nad istim lukom, svi periferni uglovi nad polukrugom su pravi uglovi. Ovo svojstvo poznato je kao **Talesova teorema**.



crtež 4

Svaki periferni ugao iznad polukruga je **pravi ugao**.

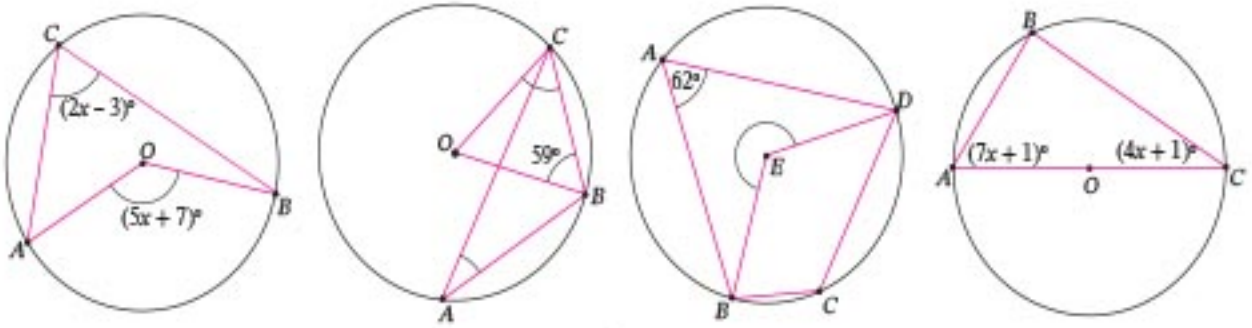
Ako uzmemo u obzir da polukrug odgovara prečniku kruga, možemo reći da je svaki periferni ugao iznad prečnika kruga pravi ugao.
Iz ovoga zaključujemo da su sve tačke u krugu prečnika AB (osim tačaka A i B) tjemena pravouglog trougla sa hipotenuzom AB.

Zadatak 2

Data je prava p i dvije tačke A i B koje ne leže na njoj. Nacrtaj tačku M na pravoj p, tako da ugao AMB bude pravi ugao.
Uputstvo: Nacrtaj krug čiji je duž AB prečnik. Označi sa M tačku presjeka kruga sa datom pravom p. Ugao AMB je periferni ugao nad prečnikom AB.

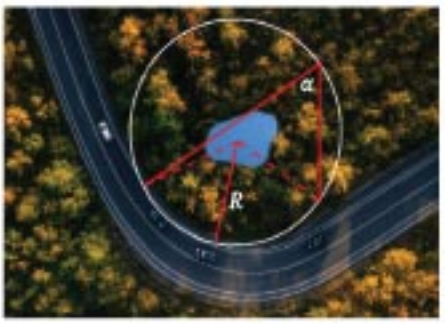
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Nađi periferni ugao koji se nalazi iznad istog kružnog luka sa centralnim uglom od:
   a) 158°, b) 89°.
2. Nađi centralni ugao koji se nalazi iznad istog kružnog luka sa perifernim uglom od:
   a) 32°, b) 83°.
3. Koliki je periferni ugao iznad kružnog luka koji predstavlja
   a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{4}{9}$, c) $\frac{5}{6}$, č) $\frac{3}{5}$ kružnice.
4. U kojim granicama se mijenja centralni ugao u krugu, a u kojim granicama periferni ugao?
5. Zbir veličine perifernog ugla i odgovarajućeg centralnog ugla u krugu iznosi 150°. Izračunaj veličinu oba ugla.
6. Prema crtežu 5, izračunajte veličinu uglova:
   a) $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle AOB$, b) $\sphericalangle CAB$, c) $\sphericalangle BED$ i $\sphericalangle BCD$, č) $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$.



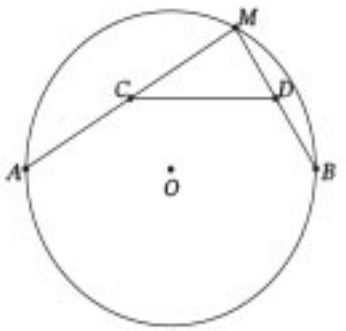
crtež 5

7. Na slici 5 dat je dio kružnice koji se vidi pod uglom $\alpha = 58°$ iz tačke na kružnici.
Pod kojim uglom se vidi isti dio iz centra kruga?



slika 5

8. Iz tačke M na kružnici $k(O, r)$ povučene su dvije međusobno normalne tetive MA i MB (crtež 6).
Rastojanje između središta C i D tetiva je 2,5 cm.
Izračunaj prečnik kruga.
Uputstvo: Primijeni svojstvo srednje linije u trouglu.



crtež 6

Istraživanje

Potreban pribor za rad: olovka, ekseri i konac.
Veži olovku za jedan kraj konca, a ekser za drugi. Nacrtaj tačku O. Zakucaj ekser u tačku O i nacrtaj krug istezanjem konca.
Izaberi tačku A na kružnici i, koristeći isti postupak kao i prethodno, nacrtaj kružnicu sa centrom u tački A. Neka B bude jedna od presječnih tačaka dva kruga. Ponovo nacrtaj krug sa centrom u tački C. Neka C bude presječna tačka trećeg kruga sa prvim krugom, koja je različita od A.
Šta predstavlja duž AC za prvi krug?
Izaberi tačku D na prvom krugu. Zakucaj eksere u tačke A, C i D. Zatim istegni konac oko zakucanih eksera. Koliki je ugao CDA?
Obrazloži svoj odgovor.

4. KONSTRUKCIJE NEKIH SPECIJALNIH VRSTA TROUGLOVA

Активност

Iso treba da napravi precizan crtež saobraćajnog znaka u obliku jednakostraničnog trougla sa stranicom od 3 cm (slika 1).
Pomozi Isi da konstruiše znak.



slika 1

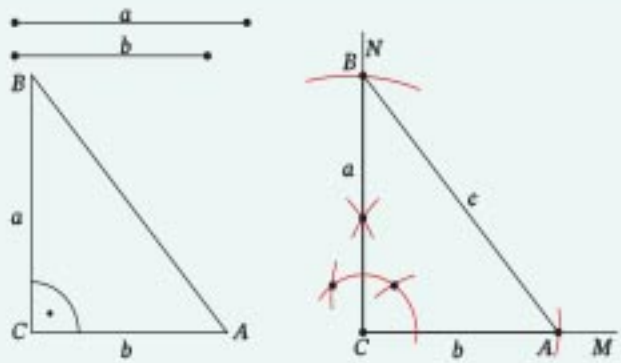
Konstrukcija pravouglog trougla sa dva data elementa

Podsjetimo se da postupak konstruisanja trougla počinje crtanjem **skice** traženog trougla slobodnom rukom. Zatim, na osnovu skice, pravimo **analizu** odnosa između datih i ostalih elemenata trougla. Na kraju, na osnovu analize, određujemo korake kojima sprovodimo **konstrukciju** trougla.

Primjer 1

Konstruiši pravougli trougao, ako su date katete a i b.

Na crtežu 1 data je skica traženog pravouglog trougla ABC sa katetama a i b. Znamo da katete pravouglog trougla zauzimaju pravi ugao. Shodno tome, konstrukcija se svodi na konstrukciju trougla sa dvije date stranice i uglom među njima.



Konstrukciju čine sljedeći koraci:

- crtamo polupravu CM gdje je C tjeme jednog trougla.
- na polupravoj CM šestarom nanosimo krak b da bismo dobili tjeme A,
- konstruišemo pravi ugao sa tjemenom C i jednim krakom na polupravoj CM,
- na drugom kraku CN pravog ugla šestarom nanosimo katetu a da bismo dobili tjeme B trougla,
- spajanjem tjemena A i B dobijamo treću stranicu trougla ABC.

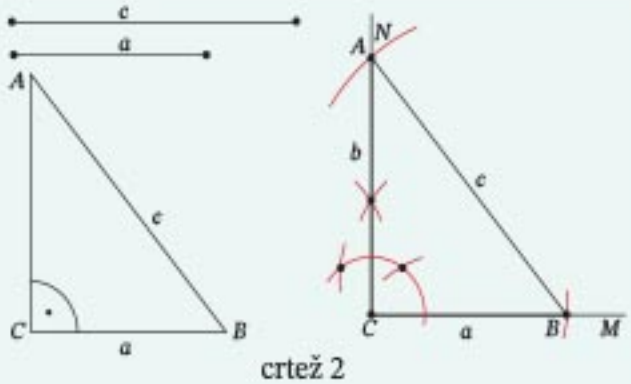
Zadatak 1

Konstruiši pravougli trougao, ako su katete $a = 3{,}6$ cm i $b = 4{,}5$ cm.

Primjer 2

Konstruiši pravougli trougao, ako je data hipotenuza c i jedna kateta a.

Na crtežu 2, kateta a i hipotenuza c nacrtane su lenjirom. Također, napravljena je i skica traženog pravouglog trougla ABC sa hipotenuzom c i katetom a.
Konstrukciju čine sljedeći koraci:



crtež 2

- crtamo polupravu CM gdje je C jedno tjeme trougla,
- na polupravoj CM šestarom nanosimo katetu a da bismo dobili tjeme B,
- konstruišemo pravi ugao sa tjemenom C i jednim krakom na polupravoj CM,
- sa CN označavamo drugi krak pravog ugla,
- sa A označavamo presjek kružnog luka sa centrom u B i poluprečnikom c sa krakom CN,
- spajanjem tjemena A i B dobijamo treću stranicu trougla ABC.

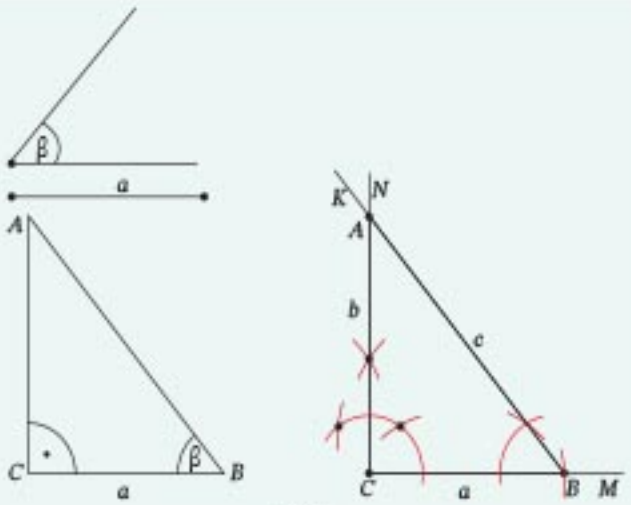
Zadatak 2

Konstruiši pravougli trougao, ako je data hipotenuza $c = 7$ cm i kateta $b = 3{,}4$ cm.

Primjer 3

Konstruiši pravougli trougao, ako su dati kateta a i ugao β.

Skica traženog pravouglog trougla ABC sa katetom a i uglom β data je na crtežu 3.
Konstrukcija se sastoji od sljedećih koraka:



crtež 3

- crtamo polupravu CM,
- na polupravoj CM šestarom nanosimo katetu a da bismo dobili tjeme B,
- konstruišemo pravi ugao sa tjemenom C,
- drugi krak pravog ugla obilježavamo sa CN
- konstruišite ugao β u tjemenu B i jedan krak BC,
- sa BK označavamo drugi krak ugla β,
- na presjeku krakova NC i BK dobijamo treće tjeme A trougla ABC.

Zadatak 3

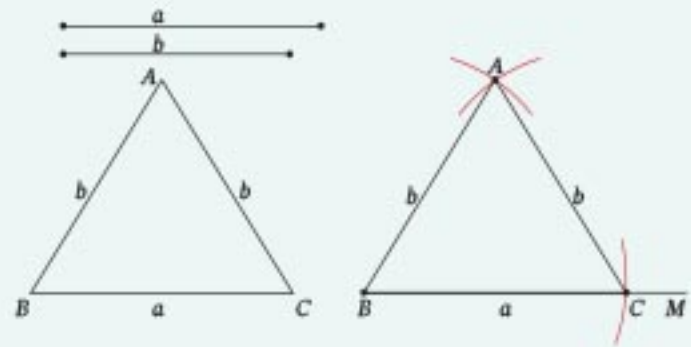
Konstruiši pravougli trougao, ako je data hipotenuza $c = 5$ cm i ugao $\alpha = 60°$.

Konstrukcija jednakokrakog trougla sa dva data elementa

Primjer 4

Konstruiši jednakokraki trougao, data je osnovica a i krak b.

Skica traženog jednakokrakog trougla ABC sa osnovom a i katetom b data je na crtežu 4. Znamo da su katete jednakokrakog trougla jednake. Prema tome, konstrukcija se svodi na konstrukciju trougla sa tri date stranice.



crtež 4

Sastoji se od sljedećih koraka:

- konstruišemo polupravu BM sa početkom u tjemenu B,
- nanosimo osnovu a na polupravu BM da bi se dobilo tjeme C,
- konstruišemo kružni luk sa centrom u B i poluprečnikom b,
- konstruišemo kružni luk sa centrom u C i poluprečnikom b,
- označimo sa A presjek dva kružna luka (A je treće tjeme trougla),
- spajamo tjeme A sa tjemenima B i C da bismo dobili trougao ABC.

Zadatak 4

Konstruiši jednakokraki trougao, ako je data stranica $b = 5$ cm i ugao kod osnove $\alpha = 45°$.

Primjer 5

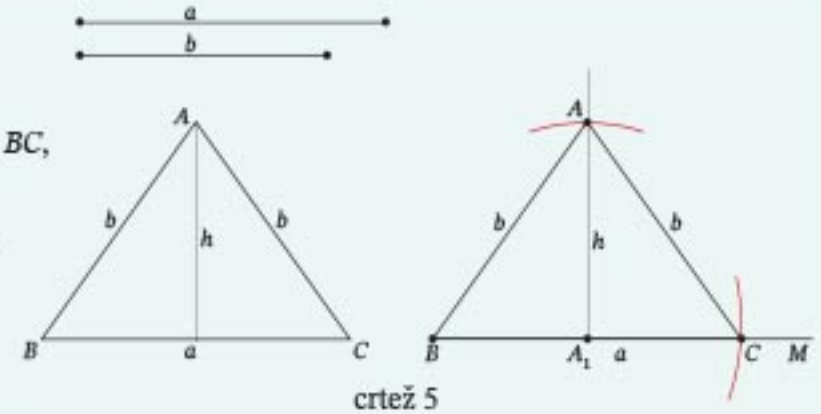
Konstruiši jednakokraki trougao, ako je data osnova a i visina h koja odgovara osnovi.

Na crtežu 5 data je skica traženog jednakokrakog trougla ABC sa osnovom a i visinom h prema osnovi. Znamo da je podnožje visine do osnove jednakokrakog trougla središnja tačka osnove.

Konstrukcija se sastoji od sljedećih koraka:

- crtamo polupravu BM koja počinje u tjemenu B,

- na polupravoj BM nanosimo osnovu a da bismo dobili tjeme C,
- konstruišemo simetralu duži BC,
- sa A_1 označavamo tačku presjeka simetrale i duži BC,
- konstruišemo kružni luk sa centrom u tački A_1 i poluprečnikom h,
- sa A označavamo tačku presjeka simetrale i kružnog luka,
- povezujemo tjeme A sa tjemenima B i C da bismo dobili trougao ABC.



crtež 5

Zadatak 5

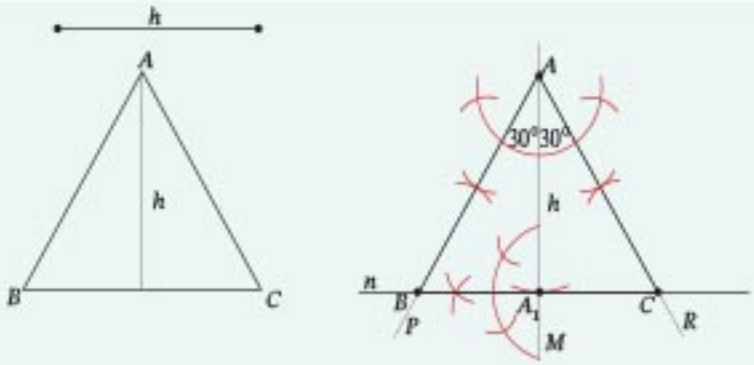
Konstruiši jednakokraki trougao, ako je dat krak b i visina h spuštena prema osnovi.

Konstrukcija jednakostraničnog trougla sa datom visinom ili sa datom težišnom linijom

Primjer 6

Konstruiši jednakostranični trougao, ako je data njegova visina h.

Skica traženog jednakostraničnog trougla ABC, sa visinom h spuštenom iz tjemena A, data je na crtežu 6. Konstrukcija se sastoji od sljedećih koraka:



- nacrtaj polupravu AM koja počinje u tjemenu A,
- na polupravoj AM, iz tjemena A nanosimo visinu h, da bismo dobili njenu osnovu A_1,
- konstruišemo dva ugla MAP i MAR od 30° (sa tjemenom u tački A, lijevo i desno od visine h),
- konstruišemo pravu n kroz tačku A_1 normalno na AA_1
- sa B označavamo tačku presjeka prave n i kraka AP,
- sa C označavamo tačku presjeka prave n i kraka AR,
- traženi trougao je trougao ABC

Primjer 7

Konstruiši jednakostranični trougao ako je data njegova težišna duž t.

U jednakostraničnom trouglu, težišna duž se poklapa sa visinom. Stoga se konstrukcija jednakostraničnog trougla sa datom težišnom duži svodi na konstrukciju jednakostraničnog trougla sa datom visinom.

Zadatak 6

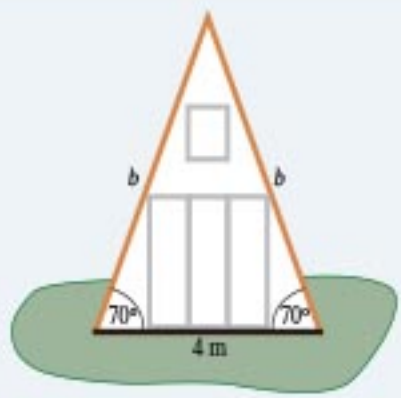
Konstruiši jednakostranični trougao ako je data njegova:
a) visina $h = 4$ cm, b) težišna linija $t = 5$ cm.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Konstruiši pravougli trougao ABC, ako su dati:
   a) katete $a = 3$ cm i $b = 4$ cm, b) hipotenuza $c = 6$ cm i kateta $b = 3$ cm.
2. Konstruiši pravougli trougao ABC, ako su dati:
   b) hipotenuza $c = 5{,}6$ cm i ugao $\alpha = 38°$, b) kateta $a = 4$ cm i ugao $\alpha = 40°$.
3. Konstruiši jednakokraki trougao ABC, ako su dati:
   a) osnova $a = 3{,}2$ cm i visina $h = 4{,}5$ cm,
   b) ugao kod osnove $\alpha = 58°$ i osnova $a = 3$ cm.
4. Konstruiši jednakokraki trougao ABC, ako su dati:
   a) ugao kod tjemena $\gamma = 46^o$ i krak $b = 5{,}2$ cm,
   b) krak $b = 6{,}2$ cm i ugao kod osnove $\alpha = 73^o$,
   c) visina do osnove $h_a = 5$ cm i ugao kod tjemena $\gamma = 48^o$.
5. Konstruiši jednakokraki trougao ABC, ako su dati:
   a) visina $h = 3{,}6$ cm, b) težište $t = 4{,}2$ cm.

Istraživanje

Kuća na slici 1 ima širinu 4 m u osnovi, a krov zahvata ugao od 70° sa osnovom kuće. Safet nema ljestve i treba da izmjeri visinu kuće. Istraži i objasni kako može da sazna kolika je visina kuće konstruišući trougao u razmjeri.



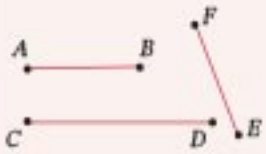
slika 1

5. POJAM PODUDARNOSTI. PODUDARNI TROUGLOVI

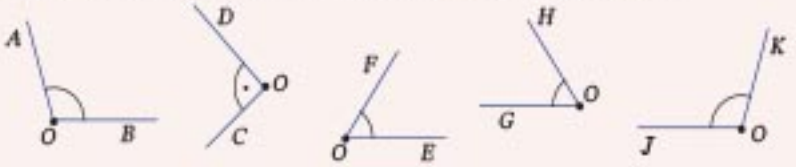
Pojam podudarnosti Podudarni 2D oblici

Aktivnost

1. a) Izmjeri duži na crtežu 1a i uporedi njihove dužine. Šta možeš zaključiti?
   b) Kolika je dužina duži AB u odnosu na duž EF?
2. Izmjeri uglove uglomjerom na crtežu 1b i odredi koji od njih imaju istu veličinu.



crtež 1a



crtež 1b

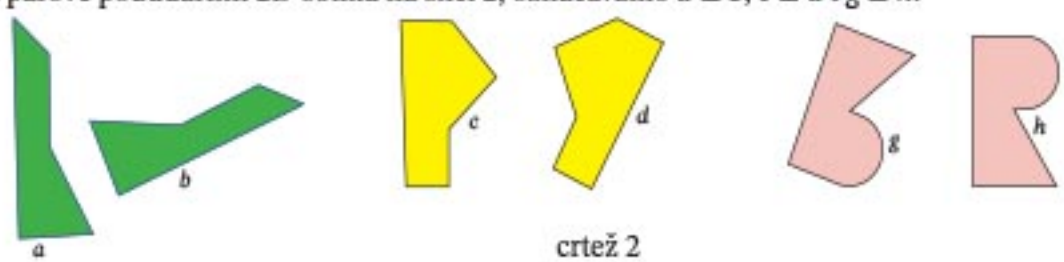
Duži koje imaju jednake dužine nazivaju se **podudarnim dužima**.
Uglovi jednakih veličina nazivaju se **podudarnim uglovima**.

Pomjeranjem jedne duži do njene podudarnosti ili pomjeranjem ugla ka njegovoj podudarnosti, ovi geometrijski oblici se poklapaju. Da li se isto odnosi i na druge geometrijske oblike? U svakodnevnom životu često govorimo o podudarnim oblicima. Pod ovim podrazumijevamo da su dva oblika podudarna ako imaju **isti oblik** i **veličinu**. Na primjer, takvi su: listovi papira ili novina, šablon i njegov kroj, dva novčića iste vrijednosti i tako dalje.

2D oblici koji se mogu poklopiti jedan sa drugim nazivaju se **podudarni 2D oblici**.

Da bismo označili podudarnost dva oblika, koristimo znak $\cong$. Znakom $\ncong$ označavamo da dati oblici nisu podudarni.

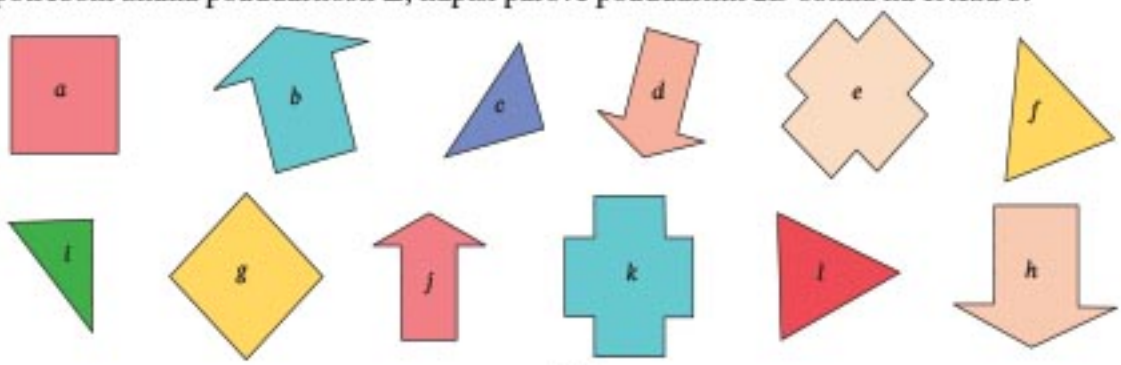
Za parove podudarnih 2D oblika na slici 2, označavamo $a \cong b$, $c \cong d$ i $g \cong h$.



crtež 2

Zadatak 1

Upotrebom znaka podudarnosti $\cong$, napiši parove podudarnih 2D oblika na crtežu 3.



crtež 3

Primjer 1

Koji je uslov da bi:

a) dva kruga bila podudarna, b) dva kvadrata bila podudarna?

Bit će podudarni ako imaju: a) jednake poluprečnike, b) stranice jednake dužine.

Zadatak 2

Nacrtaj dva podudarna pravougaonika. Ako jedan pravougaonik ima stranice 3 cm i 5 cm, kolike će biti stranice drugog pravougaonika?

Podudarni trouglovi

Podsjetimo se da su stranice i uglovi osnovni elementi trougla. S obzirom na to da smo govorili o podudarnim dužima i uglovima, pitanje podudarnosti dva trougla prirodno se nameće.

Primjer 2

Nacrtaj dva trougla i označite ih kao na crtežu 4.

a) Izmjeri stranice oba trougla. Uporedi dužine stranica: *AB* i *FD*, *AC* i *FE*, *BC* i *DE*.

b) Izmjeri uglove oba trougla. Uporedi veličine: $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle F$, $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle E$, $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle D$.

c) Zatim isijeci dva trougla i preklopi ih jedan preko drugog. Šta zaključuješ, hoće li se jednake stranice i jednaki uglovi poklapati? Hoće li se dva trougla podudarati?

č) Napiši parove tjemena, stranica i uglova koji se poklapaju.



crtež 4

a) Ako si mjerio/la pravilno, dobio/la bi da je: $\overline{AB} = \overline{FD}$, $\overline{AC} = \overline{FE}$ i $\overline{BC} = \overline{DE}$.

b) Iz izmjerenih uglova uočavaš da je: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FED$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFE$.

c) Primjećujemo da su se jednake stranice i jednaki uglovi poklopili:

AB i FD, AC i EF, BC i DE; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FED$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFE$

Dva trougla su se poklopila. U ovom slučaju, tjeme A poklopilo se sa tjemenom F, B sa D i C sa E.

č) Za tačke, stranice i uglove koji su se poklopili kažemo da su međusobno odgovarajući.

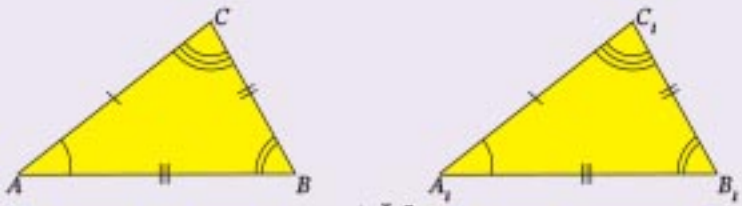
U tom smislu kažemo da:

tjeme A je podudarno sa tjemenom F, B je podudarno sa D i C je podudarno sa E, strana AB je podudarna sa stranom FD, AC je podudarno sa FE i BC je podudarno sa DE, i ugao $\sphericalangle ABC$ je podudaran sa uglom $\sphericalangle FDE$, ugao $\sphericalangle ACB$ je podudaran sa uglom $\sphericalangle FED$ i ugao $\sphericalangle BAC$ je podudaran sa uglom $\sphericalangle DFE$.

Za trouglove ABC i $A_1B_1C_1$ kažemo da su **podudarni**, ako imaju jednake odgovarajuće strane i jednake odgovarajuće uglove (crtež 5), odnosno,

$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, и

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C_1A_1$.



crtež 5

Ako su dva trougla ABC i $A_1B_1C_1$ podudarna, pišemo $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$. Dogovaramo se, prema redoslijedu tjemena u zapisima dva trougla, da čitamo odgovarajuće elemente.

Primjer 3

Napiši parove podudarnih trouglova na crtežu 6.

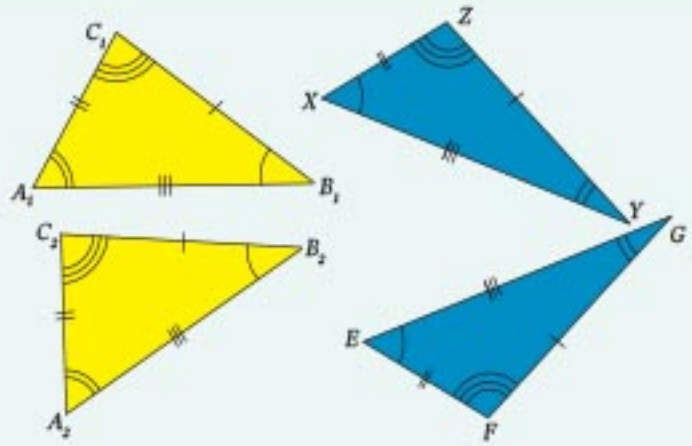
Tjeme A_1 odgovara tjemenu A_2, B_1 sa B_2 i C_1 sa C_2.

Prema oznakama na crtežu, odgovarajuće stranice su jednake:

$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ (označene sa tri crtice |||)

$\overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}$ (označene sa dvije crtice ||)

$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$ (označene sa jednom crticom |)



crtež 6

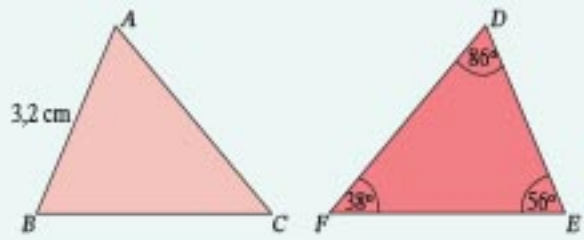
Slično tome, prema simbolima na crtežu, odgovarajući uglovi su jednaki:
$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2$, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$, $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle B_2C_2A_2$.
Znači $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.
Na isti način zaključujemo da je $\Delta XYZ \cong \Delta EGF$.

Primjer 4

Za trouglove na crtežu 7 važi da je $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
Prema podacima na crtežu, nađi:
a) dužinu stranice DE, b) veličinu ugla u tjemenu B.

Prema uslovu zadatka imamo da
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

a) Stranica DE podudarna je sa stranicom AB. Prema tome, one imaju jednake dužine,
odnosno $\overline{AB} = \overline{DE}$, jer $\overline{AB} = 3{,}2\,\text{cm}$,
zaključujemo da je $\overline{DE} = 3{,}2\,\text{cm}$

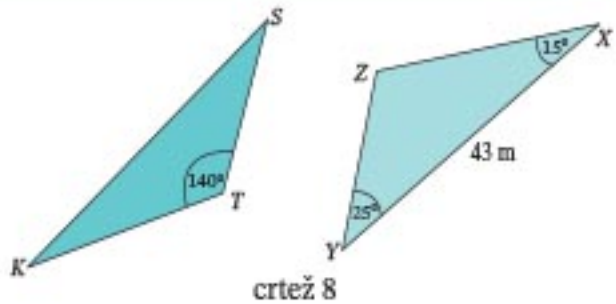


crtež 7

b) Ugao u tjemenu B podudaran je sa uglom u tjemenu E. Prema tome, oni imaju jednake veličine, odnosno $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FED$, jer $\sphericalangle FED = 56°$. zaključujemo da je $\sphericalangle CBA = 56°$.

Zadatak 3

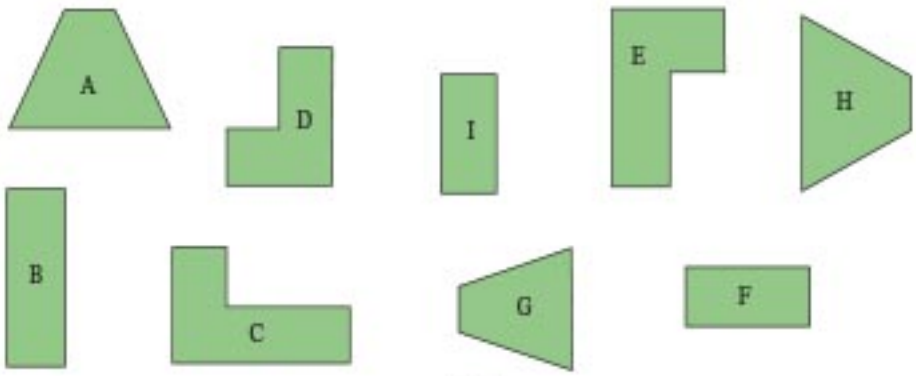
Za trouglove na crtežu 8 važi
$\Delta KST \cong \Delta XYZ$. Prema podacima na crtežu, izračunaj
a) dužinu stranice KS,
b) veličinu ugla u tjemenu S.



crtež 8

ZADACI ZA VJEŽBANJE

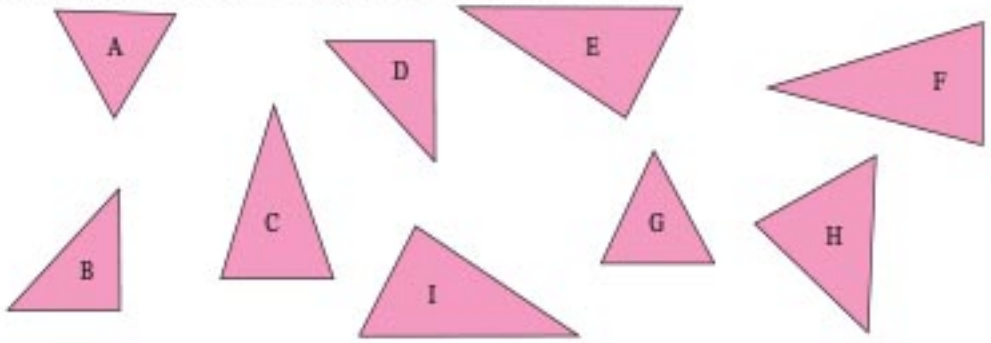
1. Zapiši parove podudarnih 2D oblika koje vidiš na crtežu 9.



crtež 9

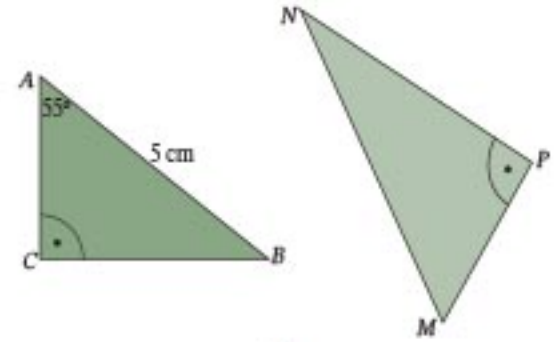
2. Poznato je da je $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Napiši odgovarajuće parove po:
   a) tjemenima, b) stranicama trouglova ABC i DEF.

3. Napiši parove podudarnih trouglova koje vidiš na crtežu 10.



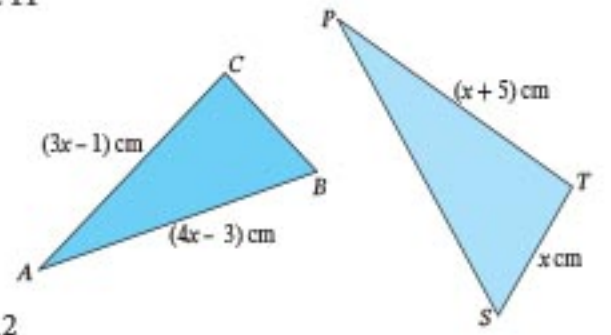
crtež 10

4. Poznato je da je $\Delta ABC \cong \Delta MNP$. Prema podacima na crtežu 11, pronađi
   a) dužinu stranice MN,
   b) veličinu ugla u tjemenu N.



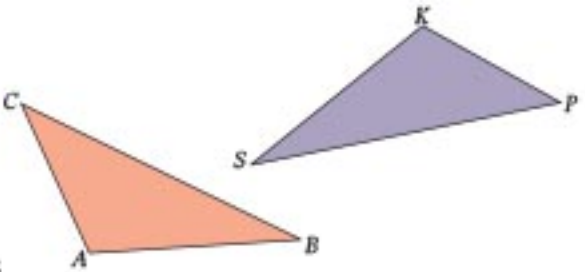
crtež 11

5. Poznato je da je $\Delta ABC \cong \Delta MNP$. Prema podacima na crtežu 12, pronađi dužinu svake od stranica trouglova.



crtež 12

6. Poznato je da je $\Delta ABC \cong \Delta KSP$ (crtež 13). Пресметај ја големината на аголот KSP, ако $\sphericalangle BAC = 138^0$ и $\sphericalangle ACB = 26°$.



crtež 13

Istraživanje

Neka je skup svih 2D oblika dat relacijom R „... je podudarna sa ...“.
Testirajte da li je relacija R refleksivna, simetrična i tranzitivna.

6. PRIZNACII PODUDARNOSTI TROUGLOVA

Da bismo provjerili da li su dva trougla podudarna, potrebno je da provjerimo da li se mogu dovesti do podudaranja, tj. preklapanja. Ali se prirodno postavlja pitanje da li je to uvijek realno moguće. Na primjer, na ovaj način ne možemo provjeriti da li su dvije parcele u obliku trougla podudarne, jer ih ne možemo dovesti do podudaranja.
Zato koristimo druge načine za određivanje podudarnosti trouglova, koji se nazivaju **znaci podudarnosti trouglova**. Oni određuju uslove za određivanje podudarnosti datih trouglova.
Postoje **tri osnovna priznaka podudarnosti trouglova**.

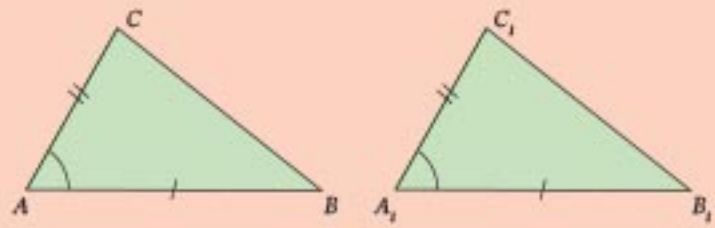
Prvi znak podudarnosti trouglova

Aktivnost

Stranice trougla duge su 3 cm i 5 cm, a ugao između njih je 102°. Koliko ovakvih trouglova možeš nacrtati? Objasni svoj odgovor.

Dva trougla su podudarna ako su dvije stranice i ugao između njih jednog trougla jednaki odgovarajućim dvjema stranicama i uglu između njih drugog trougla (crtež 1).

C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$,
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$
C: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

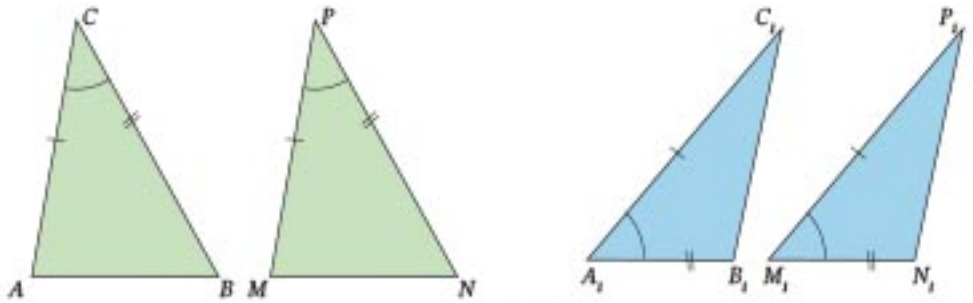


crtež 1

Prema ovom znaku , da bismo odredili podudarnost dva trougla, provjeravamo jednakost dvije stranice i ugla između njih iz jednog trougla sa odgovarajućim elementima drugog trougla.
Stoga se ovo svojstvo naziva **stranica–ugao–stranica** i skraćeno se označava kao **SUS**.

Primjer 1

Na crtežu 2, nacrtani su parovi trouglova i odgovarajući elementi su označeni.
Koristeći svojstvo SUS, utvrdi da su trouglovi podudarni:



crtež 2

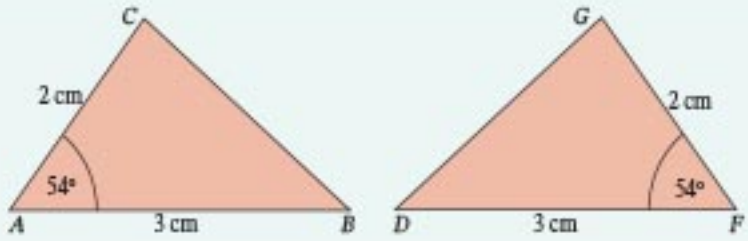
S: $\overline{AC} = \overline{MP}$
U: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MPN$
S: $\overline{CB} = \overline{PN}$
SUS: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

S: $\overline{A_1B_1} = \overline{M_1N_1}$
U: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
S: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
SUS: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Primjer 2

Provjeri da li su trouglovi na crtežu 3 podudarni.

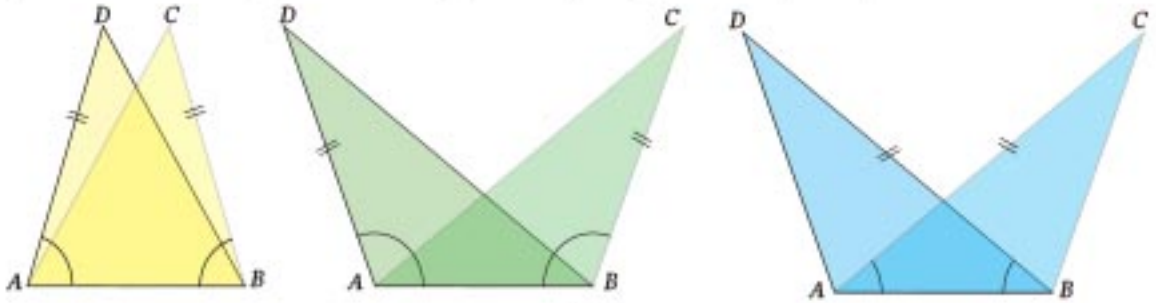
S: $\overline{AB} = \overline{FD} = 3$ cm
U: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 54°$
S: $\overline{AC} = \overline{FG} = 2$ cm
SUS: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$



crtež 3

Primjer 3

Objasni zašto su trouglovi u svakom paru trouglova podudarni (crtež 4):



crtež 4

S: AB je zajednička stranica
U: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
S: $\overline{BC} = \overline{AD}$
SUS: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

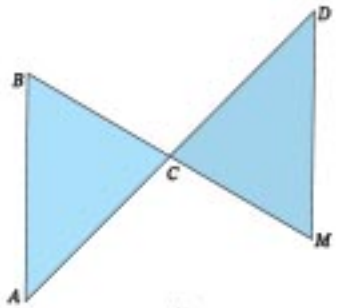
S: AB je zajednička stranica
U: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
S: $\overline{BC} = \overline{AD}$
SUS: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

S: AB je zajednička stranica
U: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$
S: $\overline{AC} = \overline{BD}$
SUS: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

Primjer 4

Razmotrimo 2D oblik na crtežu 5.

Tačka C je središte duži AD i BM.
Objasni zašto je $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.



crtež 5

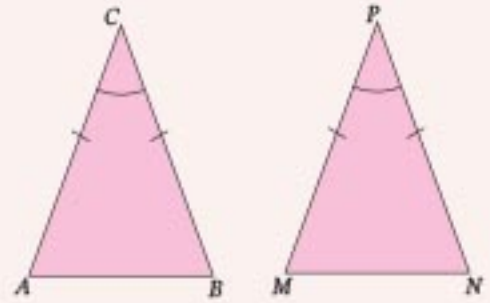
S: $\overline{AC} = \overline{DC}$ — C je središnja tačka duži AD.
U : $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCM$ — Kao unakrsni uglovi.
S: $\overline{BC} = \overline{MC}$ — C je središnja tačka duži BM.
SUS: $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.

Aktivnost

Razgledaj trouglove na crtežu 6a i 6b. Šta je dovoljno da bi se utvrdilo:
a) dva pravougla trougla su podudarna,
b) dva jednakokraka trougla su podudarna?



crtež 6a



crtež 6b

- Dva **pravougla trougla** su podudarna ako su kraci jednog trougla jednaki odgovarajućim kracima drugog trougla.
- Dva **jednakokraka trougla** su podudarna ako su krak i ugao pri vrhu jednog trougla jednaki kraku i uglu pri vrhu drugog trougla.

Primjer 5

U jednakokrakom trouglu MPQ, visina se spušta iz tjemena P na osnovu MQ (crtež 7). Provjeri da li je $\Delta MNP \cong \Delta QNP$.

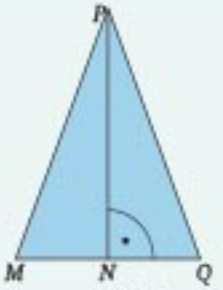
Za trouglove MNP i QNP važe sljedeći uslovi:

S: PN je zajednička stranica.

U: $\sphericalangle MNP = \sphericalangle QNP = 90°$ Visina je normalna na osnovu.

S: $\overline{NM} = \overline{NQ}$ Visina dijeli osnovu na dva jednaka dijela.

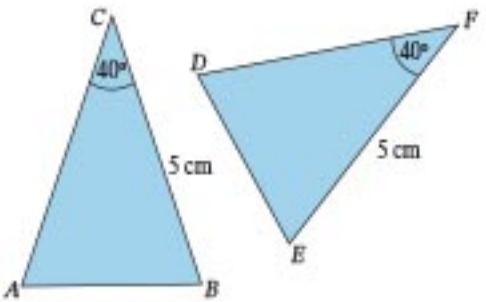
SUS: $\Delta MNP \cong \Delta QNP$



crtež 7

Zadatak 1

Objasni zašto su jednakokraki trouglovi ABC i DEF podudarni (crtež 8).



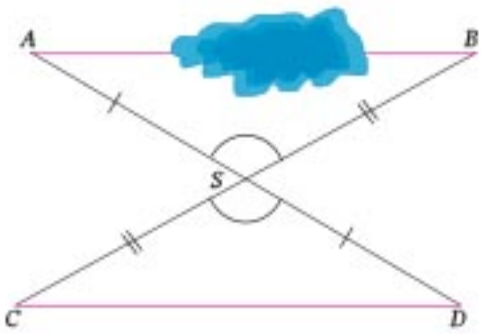
crtež 8

Zadatak 2

Geodeta na terenu prikazanom na crtežu 9 treba da izmjeri rastojanje između tačaka A i B. Među njima se nalazi pregrada koja sprečava mjerenje potrebnog rastojanja. Kako će geodeta odrediti ovo rastojanje koristeći znak SUS?
Uputstvo: Pogledaj crtež 10 i objasni zašto geodeta može da izmjeri rastojanje između tačaka C i D umjesto rastojanja između tačaka A i B (crtež 10).



crtež 9

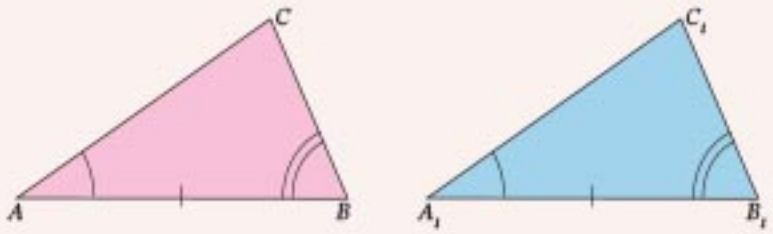


crtež 10

Drugi znak podudarnosti trouglova USU

Aktivnost

1. Na crtežu 11 prikazana su dva trougla, za koje se zna da svaki ima po jednu stranicu jednake dužine, a odgovarajući uglovi koji leže na toj stranici su jednaki. Pažljivo ih izmjeri i uporedi odgovarajuće elemente datih trouglova. Da li su trouglovi podudarni?



crtež 11

2. Nacrtaj trougao sa proizvoljnim dužinama stranica i veličinama uglova. Zatim, na providnom papiru, nacrtaj drugi trougao čija će jedna stranica i uglovi koji leže na njoj biti jednaki jednoj stranici i odgovarajućim uglovima drugog trougla.

a) Da li se trouglovi podudaraju? b) Da li su trouglovi podudarni?

Ako si pravilno radio/la, u prethodne dvije aktivnosti vidio/la si da su trouglovi podudarni.

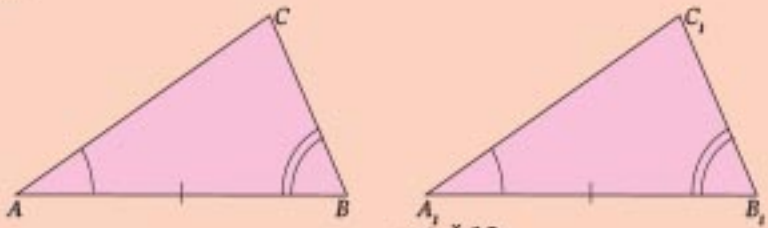
Dva trougla su podudarna ako su jedna stranica i uglovi koji leže na toj stranici jednog trougla jednaki odgovarajućoj stranici i uglovima koji leže na toj stranici drugog trougla (crtež 12).

U: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$

S: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

U: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$

USU: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

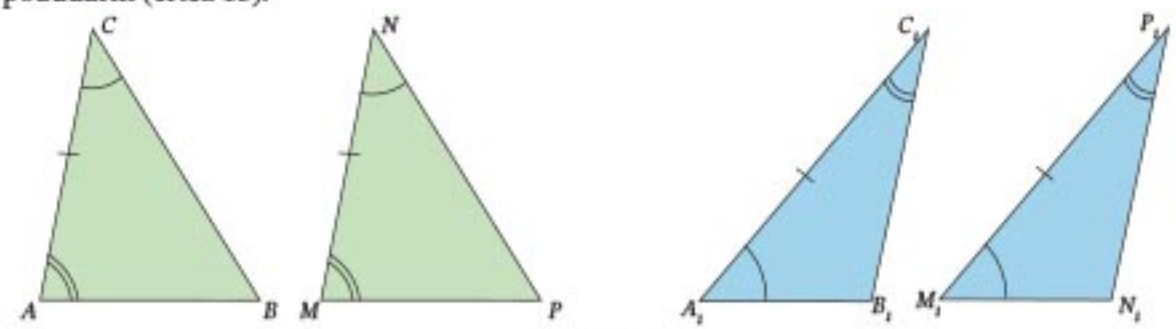


crtež 12

Znak se naziva **ugao–stranica–ugao** i skraćeno se piše **USU**, jer da bismo odredili podudarnost dva trougla, provjeravamo jednakost jedne stranice i uglova koji leže na toj stranici jednog trougla sa odgovarajućim elementima drugog trougla.

Primjer 6

Koristeći znak USU, zapiši podudarne trouglove i odredi zašto su trouglovi podudarni (crtež 13):



crtež 13

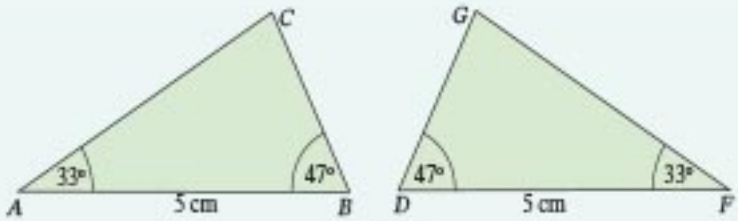
U: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle PMN$
S: $\overline{AC} = \overline{MN}$
U: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MNP$
USU: $\Delta ABC \cong \Delta MPN$

U: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
S: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
U: $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle M_1P_1N_1$
USU: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Primjer 7

Utvrdi da li su trouglovi na crtežu 14 podudarni.

U: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 33°$,
S: $\overline{AB} = \overline{DF} = 5\,\text{cm}$,
U: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDG = 47°$.
USU: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$.



crtež 14

Zadatak 3

Crtež 15 prikazuje paralelogram $KLMJ$ u kojem je nacrtana dijagonala KM. Da li su trouglovi KLM i MJK podudarni?
Objasni svoj odgovor.



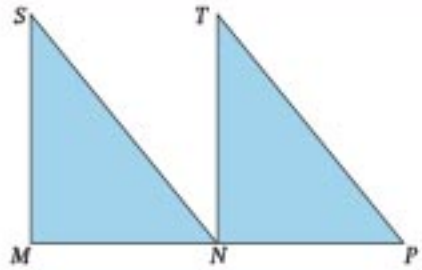
crtež 15

Primjer 8

Za 2D oblik na crtežu 16, dati su sljedeći uslovi:

$\overline{MN} = \overline{NP}$, $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ i $SN \parallel TP$.

Objasni zašto $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.



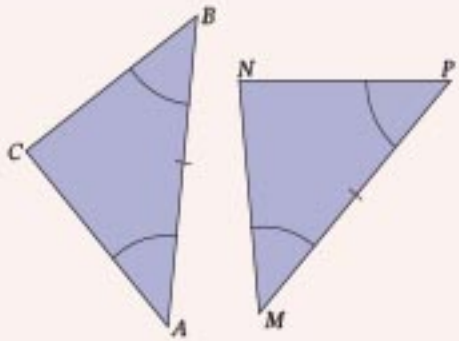
crtež 16

U: $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ — Prema uslovu u zadatku.
S: $\overline{MN} = \overline{NP}$ — Prema uslovu u zadatku.
U: $\sphericalangle MNS = \sphericalangle NTP$ — Uglovi imaju međusobno paralelne stranice zbog uslova $SN \parallel TP$.
USU: $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.

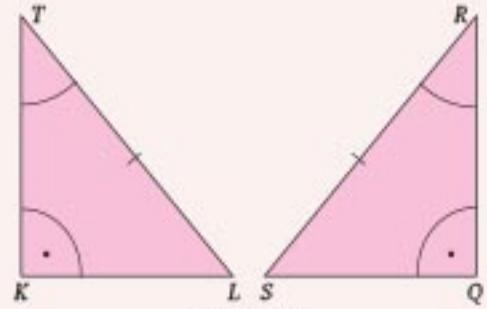
Aktivnost

a) Može li se odrediti podudarnost jednakokrakih trouglova ABC i MPN, ako su im jednaki označeni elementi na crtežu 17?

b) Zašto su pravougli trouglovi KLT i QSR na slici 18 podudarni?



crtež 17

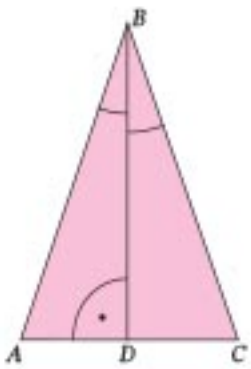


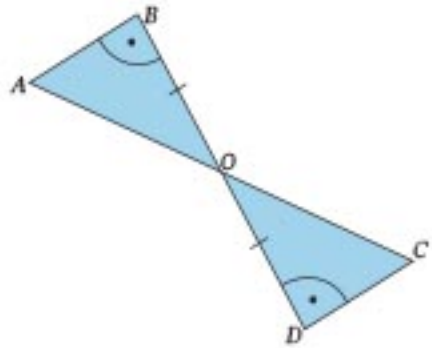
crtež 18

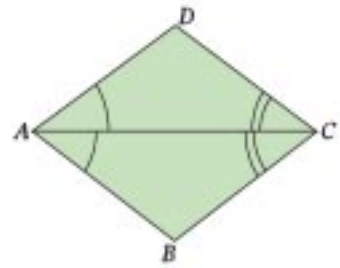
- **Dva pravougla trougla** su podudarna ako su jedna kateta i oštar ugao na njoj jednog trougla jednaki odgovarajućoj kateti i oštrom uglu na njoj drugog trougla.
- **Dva pravougla trougla** su podudarna ako su hipotenuza i jedan oštar ugao jednog trougla jednaki hipotenuzi i odgovarajućem oštrom uglu drugog trougla.
- **Dva jednakokraka trougla** su podudarna ako su osnovica i ugao koji leži na njoj jednog trougla jednaki osnovici i uglu koji leži na njoj drugog trougla.

Zadatak 4

Objasni podudarnost trouglova na crtežu 19:
a) ADB i CDB, b) ABO i CDO, c) ABC i ADC.



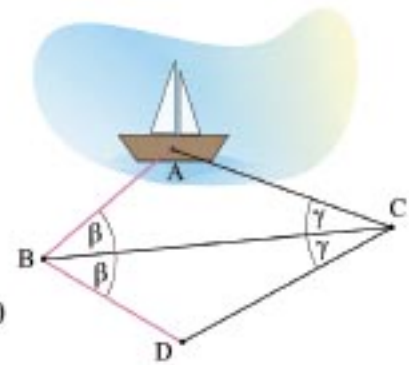




crtež 19

Zadatak 5

Kako određujemo rastojanje između čamca i kolibe na obali koja se nalazi u tački B, koristeći drugo svojstvo podudarnosti trouglova? Uputstvo: Razgledaj crtež 20 i objasni zašto umjesto da mjeriš rastojanje od A do B možeš da mjeriš rastojanje od B do D.



crtež 20

Treći priznak podudarnosti trouglova SSS

Aktivnost

Koliko trouglova možeš da nacrtaš ako su dužine njegovih stranica 4 cm, 6 cm i 7 cm, odgovarajuće? Nacrtaj takav trougao.

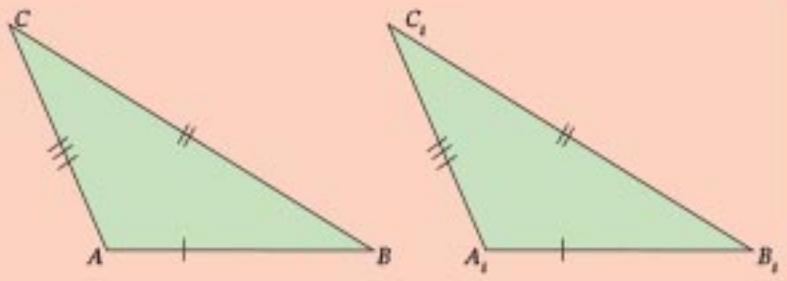
Dva trougla su podudarna ako su tri stranice jednog trougla jednake odgovarajućim stranicama drugog trougla (crtež 21).

S: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

S: $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$

S: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

SSS: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



crtež 21

Znak se naziva stranica–stranica–stranica, ili skraćeno SSS, jer određuje uslov podudarnosti dva trougla provjerom dužine tri stranice jednog trougla koje odgovaraju stranicama drugog trougla.

Primjer 9

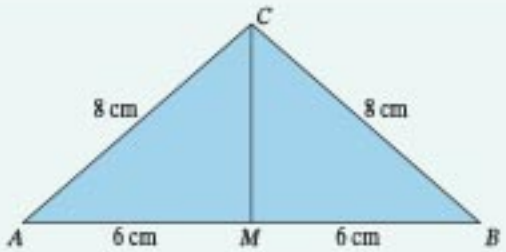
Odredi podudarnost trouglova AMC i BMC na crtežu 22.

S: $\overline{AM} = \overline{BM}$

S: $\overline{AC} = \overline{BC}$

S: MC е заедничка страна.

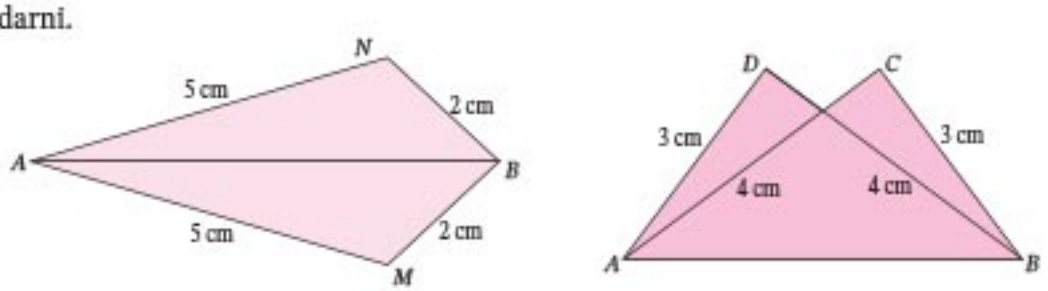
SSS: $\Delta AMC \cong \Delta BMC$



crtež 22

Zadatak 6

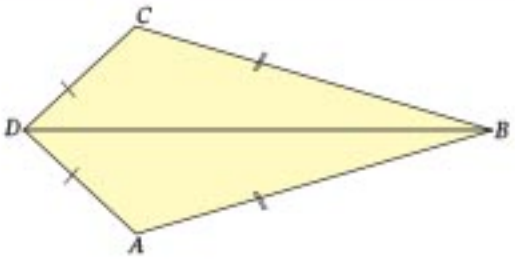
Dvodimenzionalni oblici na crtežu 23 sadrže po dva trougla. Objasni zašto su ovi trouglovi podudarni.



crtež 23

Primjer 10

Prema označenim stranicama četverougla $ABCD$ na crtežu 24, objasni zašto je zadatak $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB$.



crtež 24

C: $\overline{DA} = \overline{DC}$

C: $\overline{AB} = \overline{CB}$

C: DB je zajednička stranica

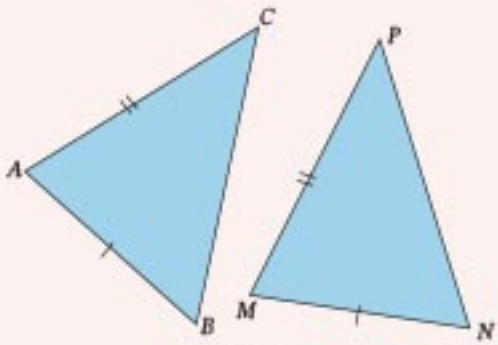
CCC: $\Delta DAB \cong \Delta DCB$

Pošto je ugao DAB podudaran uglu DCB, zaključujemo da je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$.

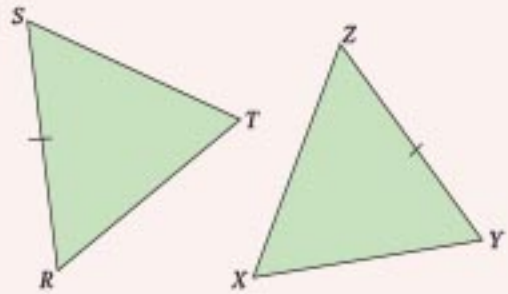
Aktivnost

a) Da li jednakokraki trouglovi ABC (sa osnovom AB) i MNP (sa osnovom MN) mogu biti podudarni, ako su im označeni elementi na crtežu 25 jednaki?

b) Zašto su jednakostranični trougloviRST i XYZ na crtežu 26 podudarni?



crtež 25



crtež 26

- **Dva jednakokraka trougla** su podudarna ako su osnovica i stranica jednog trougla jednake osnovici i stranici drugog trougla.
- **Dva jednakostranična trougla** su podudarna ako imaju jednake stranice.

Zadatak 7

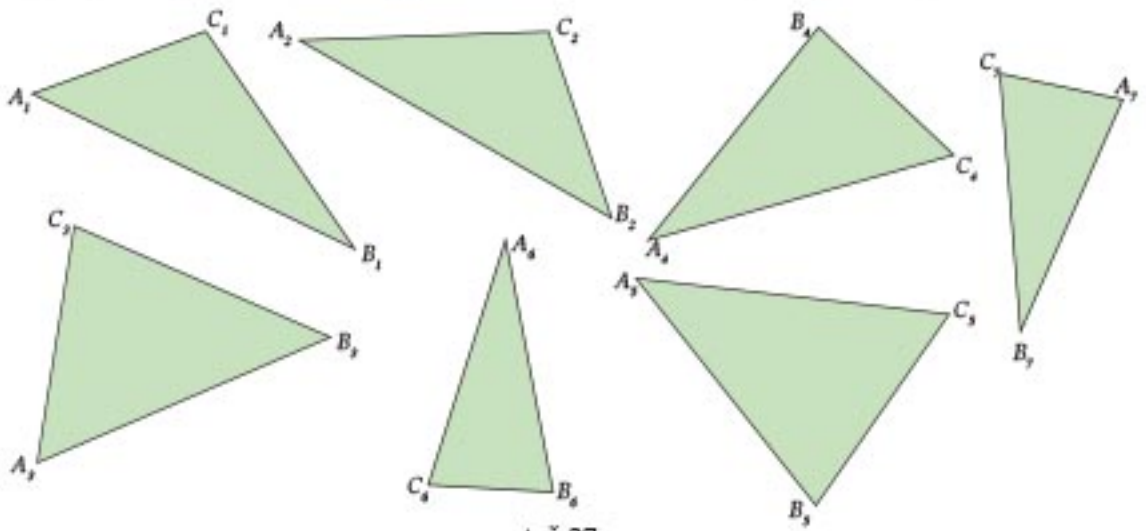
U jednakokrakom trouglu ABC, iz tjemena C spuštena je težišna linija CC_1.

Objasni zašto $\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle BC_1C$. Nacrtaj.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

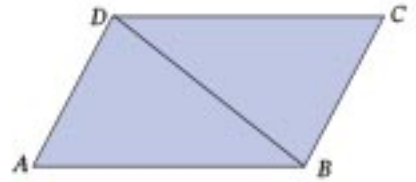
1. Prema datim uslovima, odredi da li su trouglovi podudarni, ako
   a) dva trougla imaju odgovarajuće stranice dužine 3 cm i dva odgovarajuća ugla veličine 35^0 i 80^0,
   b) dva trougla imaju odgovarajuće stranice dužine 3 cm, 9 cm i 10 cm.
   c) dva trougla imaju odgovarajuće uglove veličine 44^0, 78^0 i 58^0.

2. Napiši parove podudarnih trouglova sa crteža 27 i znakove po kojima su podudarni.



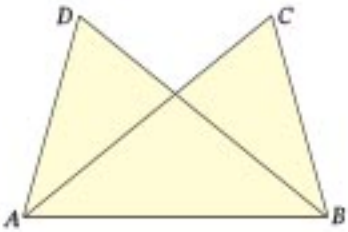
crtež 27

3. Duž BD je dijagonala paralelograma $ABCD$ (crtež 28).
   Objasni zašto je $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.



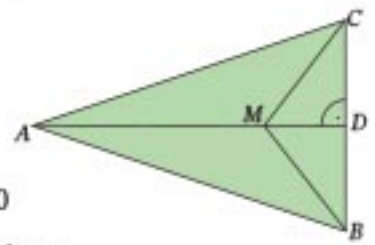
crtež 28

4. Za 2D oblik na crtežu 29, važi sljedeće:
   $\overline{AC} = \overline{BD}$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$.
   Objasni zašto: a) $\overline{AD} = \overline{BC}$ b) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.



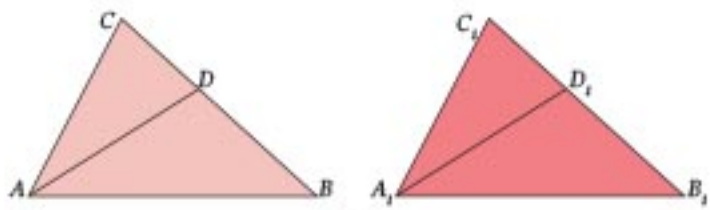
crtež 29

5. Za 2D oblik na crtežu 30 važi sljedeće:
   $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$ i $\sphericalangle BMA = \sphericalangle CMA$.
   Objasni zašto $\Delta ABM \cong \Delta ACM$.



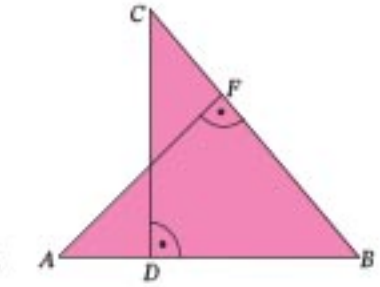
crtež 30

6. Za trouglove ABC i $A_1B_1C_1$ na crtežu 31 dati su sljedeći uslovi:
   1) $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$
   2) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$
   3) AD i A_1D_1 su simetrale uglova u tjemenima A i A_1
   4) $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$
   Objasni zašto $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



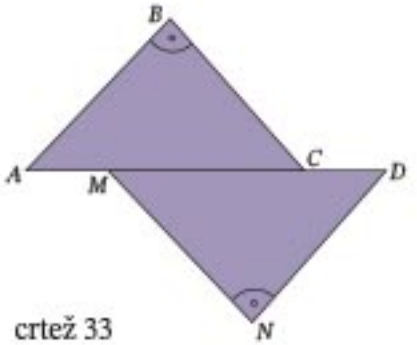
crtež 31

7. Za 2D oblik crteža 32 važi $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Objasni zašto $\overline{AF} = \overline{CD}$.



crtež 32

8. Za 2D oblik crteža 33 važi :
$BC \parallel MN$ i $\overline{AB} = \overline{ND}$.
Objasni zašto $\Delta ABC \cong \Delta DNM$.

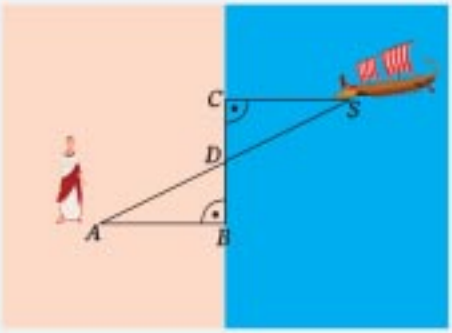


crtež 33

9. Objasni zašto su u jednakokrakom trouglu:
a) jednake težišne linije povučene prema stranicama trougla,
b) jednake visine povučene prema stranicama trougla.
Nacrtaj.

Istraživanje

Starogrčki matematičar Tales (624. p. n. e. – 547. p. n. e.) uspio je da odredi udaljenost neprijateljskih brodova od obale tokom rata. Od tačke *C* na obali koja se nalazi nasuprot brodu, hodao je (pod pravim uglom) duž obale neko proizvoljno rastojanje (na primjer, 20 koraka) do tačke *D*, gdje je postavio štap i nastavio duž iste linije na jednakom rastojanju (20 koraka) do tačke B. Zatim se kretao pod pravim uglom u unutrašnjost do tačke *A* iz koje je mogao da usmjeri pogled prema brodu preko štapa. Objasni kako je Tales odredio rastojanje do broda, koje rastojanje je izmjerio?

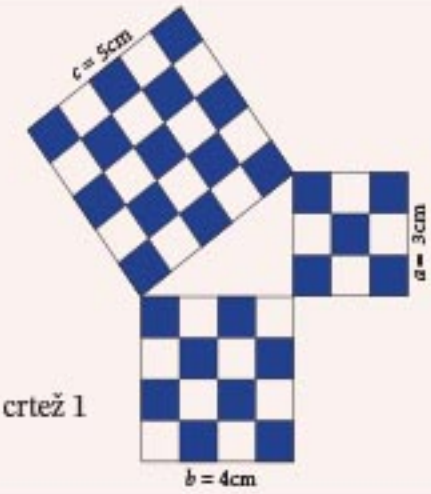


Zašto je izmjereno rastojanje jednako rastojanju između broda i obale?
Metoda, koja se pripisuje Talesu iz Mileta, korištena je i za određivanje širine rijeka, širine stijena i slično.

7. PITAGORINA TEOREMA

Aktivnost

Dat je pravougli trougao sa katetama 3 cm i 4 cm i hipotenuzom 5 cm (crtež 1). Svaki od kvadrata podijeljen je na kvadrate sa stranicama 1 cm.
a) Koliko kvadratića ima svaki kvadrat?
b) Da li postoji veza između zbira kvadratića nad katetama i broja kvadrata nad hipotenuzom?



crtež 1

Sigurno si uočio da postoji veza između zbira kvadrata nad katetama i broja kvadrata nad hipotenuzom. Naime, broj kvadrata nad

katetom dužine 3 cm je $3^2 = 9$,
katetom dužine 4 cm je $4^2 = 16$, i
hipotenuzom dužine 5 cm je $5^2 = 25$.

To znači da je zbir broja kvadrata nad katetama jednak broju kvadratića nad hipotenuzom, tj. $9 + 16 = 25$.
Svojstvo koje si primijetio/la važi za svaki pravougli trougao i poznato je kao Pitagorina teorema, posvećena drevnom matematičaru **Pitagori.**

Pitagorina teorema

U svakom pravouglom trouglu, kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad katetama.

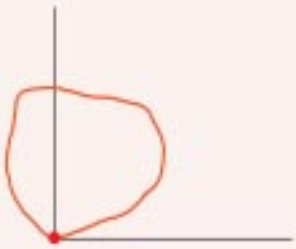
Prema tome, u pravouglom trouglu odnos između kateta a i b i hipotenuze c određen je formulom

$c^2 = a^2 + b^2$.

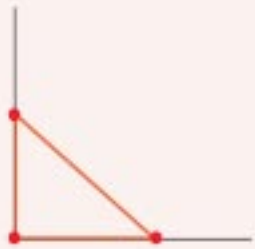
Aktivnost

Za aktivnost će ti biti potrebno: list papira, komad stiropora (kvadrat sa stranicama od oko 10 cm), gumica i 3 iglice sa kuglicama na vrhu za pričvršćivanje papirnih materijala na stiropor.
Priprema: Nacrtaj pravi ugao na listu papira. Pričvrsti list na stiropor tako što ćeš zabosti jednu od iglica u vrh pravog ugla (crtež 2a).

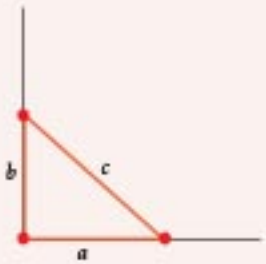
Zatim pričvrsti gumicu na tu iglicu. Pomoću druge dvije, zategni gumicu i pričvrsti je na svaki od krakova ugla (crtež 2b). Izmjeri dužine kateta a, b i hipotenuze c (crtež 2b) i provjeri da li za njih važi $a^2 + b^2 = c^2$. Pomjeri dvije iglice duž kateta, ponovo izmjeri i provjeri.



crtež 2a



crtež 2b



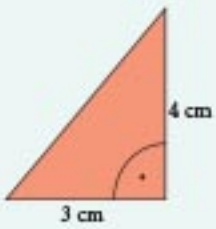
crtež 2c

Primjer 1

Izračunaj dužinu hipotenuze u pravouglom trouglu, ako su date katete:
a) $a = 3$ cm i $b = 4$ cm, b) $a = 8$ cm i $b = 10$ cm.

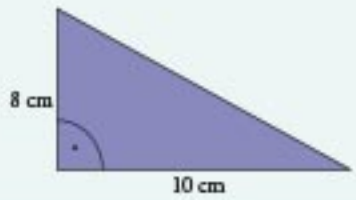
U proračunima koristimo kalkulator i rezultat ćemo zaokružiti na dvije decimale.
Prema Pitagorinoj teoremi za hipotenuzu c dobijamo:

a)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$
$c = \sqrt{25}$
$c = 5$ cm

b)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 10^2 + 8^2$
$c^2 = 100 + 64$
$c^2 = 164$
$c = \sqrt{164}$
$c = 12{,}81$ cm

Uočavamo da prilikom izračunavanja hipotenuze, umjesto formule $c^2 = a^2 + b^2$, možemo direktno da koristimo izvedenu formulu

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Zadatak 1

Izračunaj dužinu hipotenuze c pravouglog trougla ako su date katete:
a) $a = 24$ cm i $b = 7$ cm, b) $a = 12$ cm i $b = 13$ cm.

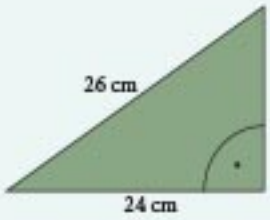
Pomoću Pitagorine teoreme, možemo da odredimo dužinu jedne od kateta, ako su date hipotenuza i druga kateta.

Primjer 2

Izračunaj dužinu jedne katete pravouglog trougla, ako su date hipotenuza i kateta:
a) $c = 26$ cm $a = 24$ cm, b) $b = 27$ cm i $c = 50$ cm.

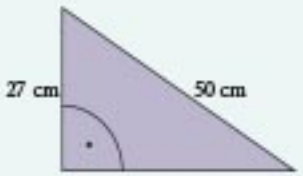
Prema Pitagorinoj teoremi za nepoznatu katetu dobijamo:

a)



$c^2 = a^2 + b^2$
$26^2 = 24^2 + b^2$
$676 = 576 + b^2$
$b^2 = 676 - 576$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100}$
$b = 10$ cm

b)



$c^2 = a^2 + b^2$
$50^2 = a^2 + 27^2$
$2500 = a^2 + 729$
$a^2 = 2500 - 729$
$a^2 = 1771$
$a = \sqrt{1771}$
$a = 42{,}08$ cm

Zabilježimo da prilikom izračunavanja nepoznate katete, umjesto formule $c^2 = a^2 + b^2$, možemo direktno da koristimo izvedene formule:

$a^2 = c^2 - b^2$ ili $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ i $b^2 = c^2 - a^2$ ili $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Zadatak 2

Izračunaj dužinu jedne katete pravouglog trougla ako su date hipotenuza i druga kateta:
a) $c = 15$ cm i $a = 11$ cm, b) $c = 50$ cm i $b = 30$ cm.

Primjer 3

Tanja ide pješke do škole. Prvo pređe 180 m svoje ulice, zatim skreće pod uglom od 90° i pređe još 240 m do škole (crtež 3). Kolika je dužina duži čije su krajnje tačke Tanjina kuća i škola?



crtež 3

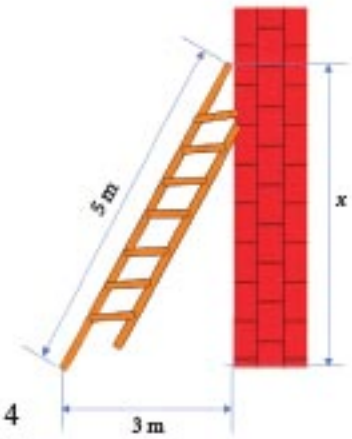
Tanja se kreće duž dvije katete $a = 180$ m i $b = 240$ m pravouglog trougla. Rastojanje od Tanjine kuće do škole je hipotenuza c tog trougla.
Koristeći Pitagorinu teoremu, dobijamo

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{180^2 + 240^2} = c = \sqrt{32\,400 + 57\,600} = \sqrt{90\,000} = 300\,\text{m}.$$

Dužina duži čije su krajnje tačke Tanjina kuća i škola je 300 m.

Zadatak 3

Ljestve dužine 5 m naslonjene su na vertikalni zid (crtež 4).
Podnožje ljestava udaljeno je 3 m od zida.
Na kojoj visini iznad tla ljestve dodiruju zid?



crtež 4

Važi i obrnuto svojstvo Pitagorine teoreme.

Obrnuta Pitagorina teorema

Ako je kvadrat najduže stranice jednog trougla jednak zbiru kvadrata druge dvije stranice, onda je taj trougao pravougli.

Pomoću obrnute Pitagorine teoreme, možemo utvrditi da li je trougao pravougli.

Primjer 4

Provjeri da li je pravougli trougao sa stranicama:
a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm i $c = 5$ cm, b) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm.

a) Prema obrnutoj Pitagorinoj teoremi, trougao je pravougli jer:
$5^2 = 3^2 + 4^2$.
Ovaj trougao bio je poznat starim Egipćanima, zbog čega je nazvan **egipatski trougao**.

b) Prema Pitagorinoj teoremi, trougao je pravougli jer
$13^2 = 5^2 + 12^2$.
Ovaj trougao bio je poznat starim Indijcima, zbog čega je nazvan **indijski trougao**.

Prirodni brojevi a, b i c za koje važi jednačina $a^2 + b^2 = c^2$, odnosno koji mogu biti stranice pravouglog trougla, nazivaju se **Pitagorine trojke**.
Pitagorinu trojku zapisujemo kao uređenu trojku brojeva (a, b, c).

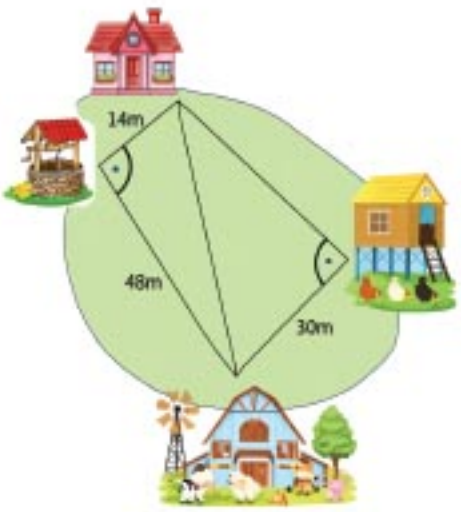
Pitagorine trojke su, na primjer, (3, 4, 5), (12, 5, 13), (20, 21, 29) itd.

Zadatak 4

Provjeri da li su Pitagorine trojke date trojke brojeva:
a) (10, 11, 14), b) (6,8,10), c) (9,12,15), č) (10,24,26), ć) (15,36,39).

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Odredi hipotenuzu pravouglog trougla, ako su njegove dvije katete:
   a) $a = 6$ cm i $b = 12$ cm, b) $a = 8$ cm i $b = 6$ cm,
   c) $a = 12$ cm i $b = 16$ cm, č) $a = 10$ cm i $b = 24$ cm.
2. Odredi jednu katetu pravouglog trougla ako hipotenuza i druga kateta imaju dužine:
   a) $c = 20$ cm i $b = 12$ cm, b) $c = 10$ cm i $a = 8$ cm,
   c) $c = 25$ cm i $b = 15$ cm, č) $c = 34$ cm i $a = 16$ cm.
3. Dva broda isplovila su iz luke istovremeno, jedan je išao prema zapadu brzinom od 24 km/h, a drugi prema sjeveru brzinom od 26 km/h. Izračunaj koliko će brodovi biti udaljeni jedan od drugog poslije:
   a) 1 sata, b) 2 sata od polaska.
4. Izračunaj obim pravouglog trougla ako su date hipotenuza i jedna kateta:
   a) c = 29 cm i $b = 21$ cm,
   b) c = 34 cm i $b = 16$ cm,
   c) c = 17 cm i $b = 15$ cm.
5. U seoskom dvorištu, kuća i bunar udaljeni su 14 m, bunar i štala udaljeni su 48 m, a štala i kokošinjac udaljeni su 30 m (crtež 5).
   a) Koliko je rastojanje između kuće i štale?
   b) Koliko je rastojanje između kuće i kokošinjca?



crtež 5

6. Provjeri da li je trougao pravougli, ako je:
   a) $a = 15$ cm, $b = 36$ cm i c = 39 cm, b) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm i c = 15 cm,
   c) $a = 20$ cm, $b = 13$ cm i c = 25 cm, č) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm i c = 15 cm.

7. **Projektna aktivnost**

   1. Sastavljamo Pitagorine trojke

   Pitagorine trojke sastavljamo (a, b, c) koristeći Euklidove formule.
   Neka su m i n bilo koji prirodni brojevi takvi da je $m > n$.
   Brojeve a, b i c koji čine Pitagorinu trojku dobijamo formulama:
   $$a = (m^2 - n^2)k,\ b = 2mnk \text{ i } c = (m^2 + n^2)k.$$
   Na primjer, za $m = 2$, $n = 1$ i $k = 1$ dobijamo
   $$a = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3,\ b = 2 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{4} \text{ i } c = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = \mathbf{5},$$
   za $m = 3$, $n = 1$ i $k = 1$, dobijamo
   $$a = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = \mathbf{8},\ b = 2 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{6} \text{ i } c = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = \mathbf{10}.$$

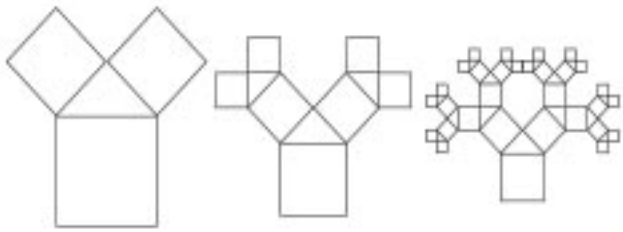
Прецртај ги і пополни ги дадените табели.

$m = 2, n = 1$ і $k = 1$	a	b	c
$m = 3, n = 1$ і $k = 1$			
$m = 4, n = 1$ і $k = 1$			
$m = 5, n = 1$ і $k = 1$			
$m = 6, n = 1$ і $k = 1$			

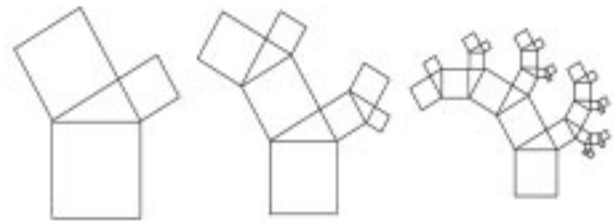
$m = 3, n = 2$ і $k = 1$	a	b	c
$m = 4, n = 2$ і $k = 1$			
$m = 5, n = 2$ і $k = 1$			
$m = 6, n = 2$ і $k = 1$			
$m = 7, n = 2$ і $k = 1$			

2. Kreiramo Pitagorino drvo

U Pitagorinom drvetu, dužine stranica njegovih grana i listova imaju mjerne brojeve koji su Pitagorine trojke. Pitagorino drvo počinjemo da formiramo od korijena crtanjem kvadrata preko kojeg konstruišemo pravougli trougao, koji može biti jednakokrak (crtež 6a) ili jednakostranični (slika 6b).



crtež 6a



crtež 6b

Produžavamo konstruisanjem kvadrata nad katetama, zatim nad kvadratima novih pravouglih trouglova i tako gradimo našu kreaciju.
Primjeri Pitagorinih stabala dati su na crtežu 7a i crtežu 7b.



crtež 7a



crtež 7b

Tvoj zadatak je da napraviš svoje Pitagorino drvo na papiru, počevši od kvadrata sa stranicom od 5 cm i iznad njega:

a) jednakokraki pravougli trougao, b) raznostranični pravougli trougao.

Možeš da planiraš oblik stabla, grana i lišća kako želiš i sastaviš ga postavljanjem trouglova u različite položaje.

Istraživanje



1. Pitagorina teorema jedna je od najvažnijih i najprimjenjivanijih teorema u geometriji. Ime je dobila u čast drevnog matematičara i filozofa Pitagore, koji je živio u 6. vijeku prije nove ere. Pomoću interneta potraži informacije o životu drevnog matematičara Pitagore i njegovim otkrićima.
2. Meteorolozi jedne meteorološke stanice posmatraju oblak u atmosferi. Mjerenjem su utvrdili da:
   - rastojanje duž tla od meteorološke stanice do tačke koja se nalazi vertikalno ispod oblaka iznosi $d = 4$ km,
   - visina oblaka iznad tla je $h = 1{,}5$ km.

   Rastojanje od meteorološke stanice do oblaka označeno je sa L.

   a) Prikaži situaciju skicom i označi katete i hipotenuzu pravouglog trougla.

   b) Primjenom Pitagorine teoreme, izračunaj rastojanje L od meteorološke stanice do oblaka. Zaokruži rezultat na najbližih 0,1 km.

   c) Objasni kako bi naučnici mogli da provjere tačnost mjerenja koristeći obrnutu Pitagorinu teoremu, ako bi odvojeno izmjerili tri dužine (dvije katete i hipotenuzu).

   č) Istraži u kojim slučajevima greška u mjerenjima sa tačnošću od 0,1 km može biti kritična u meteorologiji (za letove aviona ili za prognozu vremena).

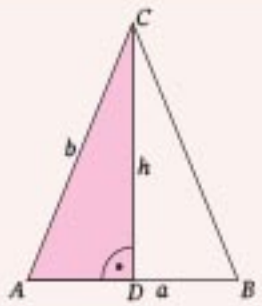
8. PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA TROUGLOVE

Активност

Na crtežu 1 dat je jednakokraki trougao ABC sa osnovom a i stranicom b. Iz tjemena C, visina h povučena je do osnove.

a) Da li su trouglovi ADC i BCD pravougli?

b) Da li je $\overline{AD} = \overline{DB}$?



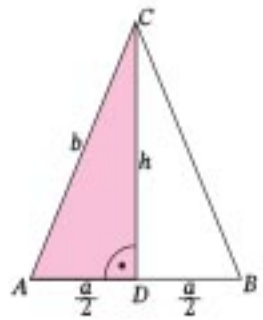
crtež 1

U jednakokrakom trouglu ABC, visina h povučena do osnove a dijeli jednakokraki trougao ABC na dva podudarna pravougla trougla ADC i BDC (crtež 2).

Prema Pitagorinoj teoremi, dobijamo formulu za izračunavanje stranice b jednakokrakog trougla.

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

gdje je h visina trougla, a a je osnova trougla.



crtež 2

Primjer 1

U jednakokrakom trouglu izračunaj:

a) stranicu b, ako je $a = 16$ cm i $h = 15$ cm, b) visinu h, ako je $a = 10$ i $b = 13$ cm,

c) osnovu a, ako je $b = 25$ m i $h = 24$ m.

Prema Pitagorinoj teoremi, zamjenom u odgovarajuće formule, dobijamo

a) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + 8^2$

$b^2 = 289$

$b = \sqrt{289}$

$b = 17$ cm.

b) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - 5^2$

$h^2 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$ cm.

$h = 12$ cm.

c) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25^2 - 24^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 49$

$\frac{a}{2} = 7$

$a = 14$ cm.

Zadatak 1

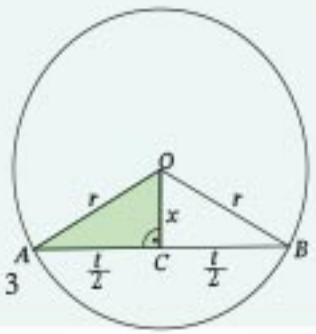
Izračunaj obim jednakokrakog trougla sa osnovicom od 18 cm i visinom od 12 cm. Izradi crtež.
Uputstvo: Obim jednakokrakog trougla izračunava se pomoću formule
$L = a + 2b$, gdje je a osnovica, a b stranica jednakokrakog trougla.

Primjer 2

U krugu poluprečnika $r = 8$ cm nacrtana je tetiva $t = 12{,}8$ cm. Izračunaj rastojanje tetive od centra kruga (crtež 3).

Trougao ABO je jednakokraki trougao sa stranicama $\overline{AO} = \overline{BO} = r$.
Rastojanje $\overline{OC} = x$ je visina pravouglog trougla ABO.
Koristeći Pitagorinu teoremu, dobijamo

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 8^2 - \left(\frac{12{,}8}{2}\right)^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04,\ x = 4{,}8 \text{ cm}.$$



crtež 3

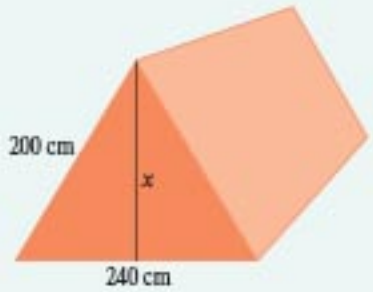
Primjer 3

Dragan treba da kupi cijev za podupiranje svog šatora, čiji je ulaz u obliku jednakokrakog trougla sa krakom od 200 cm i osnovicom od 240 cm (slika 1). Kolika je dužina cijevi koju Dragan treba da kupi?

Dužina cijevi x je visina jednakokrakog trougla sa osnovom 240 cm i stranicom 200 cm.
Koristeći Pitagorinu teoremu dobijamo da

$$x^2 = 200^2 - \left(\frac{240}{2}\right)^2 = 200^2 - 120^2 = 25600,\ x = 160 \text{ cm}.$$

Dužina cijevi koju Dragan treba da kupi je 160 cm.

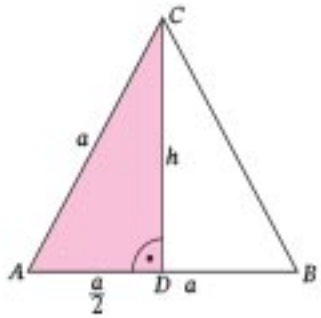


slika 1

Povlačenjem bilo koje visine h, jednakostranični trougao ABC dijeli se na dva podudarna pravougla trougla (crtež 4).
Prema Pitagorinoj teoremi, dobijamo formulu za izračunavanje stranice a jednakostraničnog trougla

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

gdje je h visina jednakostraničnog trougla.



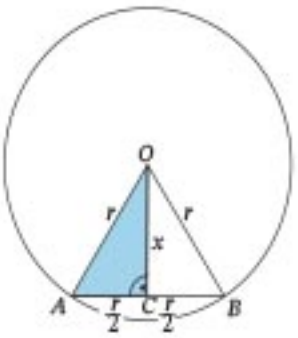
crtež 4

Zadatak 2

U jednakostraničnom trouglu izračunaj visinu h, ako je stranica $a = 10$ cm.

Zadatak 3

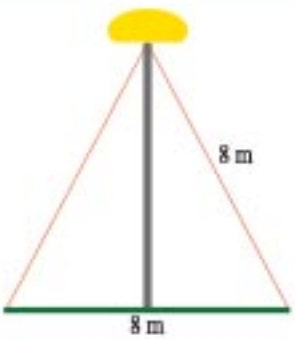
U krugu poluprečnika $r = 8$ cm nacrtana je tetiva dužine jednake poluprečniku kruga.
Izračunaj rastojanje x tetive od centra kruga (crtež 5).



crtež 5

Zadatak 4

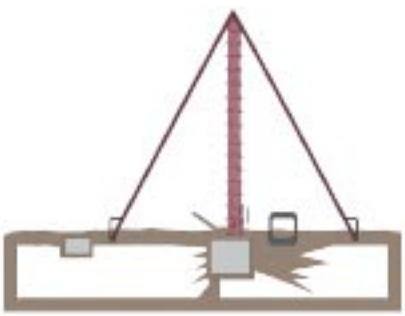
Na školskom igralištu postavljena je svjetiljka na stub dužine 8 m koji je oslonjen na dva simetrična nosača, svaki dužine 8 m (slika 2). Koliko je visok stub ako je rastojanje između dva nosača mjereno na tlu 8 m?



slika 2

ZADACI ZA VJEŽBANJE

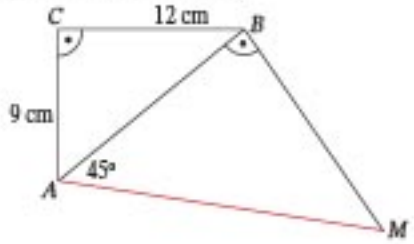
1. Izračunaj visinu jednakokrakog trougla, ako su poznate njegova osnovica i krak:
   a) $a = 7$ cm i $b = 5{,}5$ cm, b) $a = 18$ cm i $b = 15$ cm.
2. Izračunaj krak jednakokrakog trougla sa datom osnovicom a i visinom do osnove h:
   a) $a = 14$ cm i $h = 24$ cm, b) $a = 24$ dm i $h = 16$ dm.
3. Izračunaj visinu jednakostraničnog trougla sa stranicom:
   a) $a = 8$ cm, b) $a = 10$ cm.
4. Izračunaj dužinu kraka jednakokrakog pravouglog trougla, ako je hipotenuza dugačka 10 cm.
5. Stub visine 40 m vezan je čeličnim konopcima za klinove zabijene u zemlju na rastojanju od 9 m od njegove osnove (slika 3).
   Kolika je dužina čeličnih užadi?



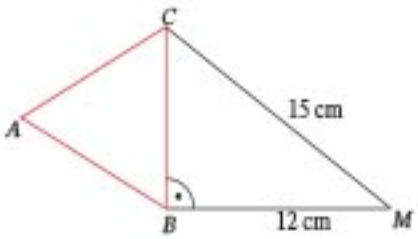
slika 3

6. Prema podacima datim na crtežu 6, izračunaj:

a) dužinu duži AM,



b) obim jednakostraničnog trougla ABC.



crtež 6

7. U sredini kružnog jezera postavljena je skulptura prečnika 60 metara.

Preko jezera izgrađen je most dužine 48 metara (slika 4). Od sredine mosta treba da se postavi manji montažni most koji će voditi do skulpture.
Kolika će biti njegova dužina?

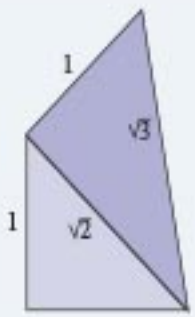


slika 4

Istraživanje

Da bismo konstruisali duž dužine $\sqrt{2}$ u izabranoj jedinici mjere, potrebno je da konstruišemo pravougli trougao sa katetom 1. Ako na crtežu na kojem smo konstruisali duž dužine $\sqrt{2}$, konstruišemo pravougli trougao sa katetama dužine $\sqrt{2}$ i dužine 1, dužina hipotenuze biće jednaka

$\sqrt{3}$ $((\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$ (crtež 7).



Objasni postupak, kojim ćeš moći u jednom istom crtežu da konstruišeš duži dužine: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$.

9. ČETVEROUGAO. PARALELOGRAM. PRAVOUGAONIK, ROMB I KVADRAT

Aktivnost

a) Navedi nazive četverouglova na crtežu 1.

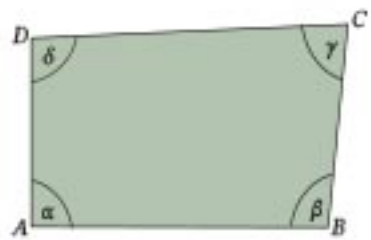


crtež 1

b) Navedi neka svojstva paralelograma, pravougaonika, rombova i kvadrata koja znaš.

Četverougao

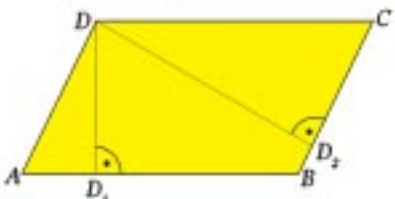
Razgledaj četverougao $ABCD$ na crtežu 2.
Podsjetimo se da su tačke A, B, C i D **tjemena** četverougla, a da su duži AB, BC, CD i DA **stranice** četverougla.
Uglovi α, β, γ i δ su unutrašnji uglovi (skraćeno, uglovi) četverougla.



Dva tjemena koja leže na istoj stranici nazivaju se **susjedna tjemena**, a dva tjemena koja ne leže na istoj stranici nazivaju se **suprotna tjemena**. Na primjer, tjemena A i B su susjedna, a tjemena A i C su suprotna tjemena. Dvije stranice koje dijele zajedničko tjeme nazivaju se **susjedne stranice**, a dvije stranice koje ne dijele zajedničko tjeme nazivaju se **suprotne stranice**. U tom smislu, stranice AB i BC su **susjedne**, a stranice AB i CD su **suprotne stranice**.
Uglovi koji leže na istoj stranici nazivaju se **susjedni uglovi**, a uglovi koji ne leže na istoj stranici nazivaju se **suprotni uglovi**.
Zbir uglova u četverouglu je $360°$, odnosno $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Paralelogram

Podsjetimo se da se četverougao sa dva para paralelnih stranica naziva **paralelogram**.
Rastojanje između paralelnih stranica u paralelogramu naziva se **visina paralelograma**. Isto tako, znamo da se duž čije su krajnje tačke dva suprotna tjemena naziva **dijagonala paralelograma**.



crtež 3a



crtež 3b

Na crtežu 3a dat je paralelogram $ABCD$. Duži DD_1 i DD_2 su visine spuštene iz tjemena D na stranice AB i BC, odgovarajuće. Treba napomenuti da svaki paralelogram ima dvije visine. Na slici 3b dat je paralelogram $ABCD$. Duži AC i BD su dijagonale paralelograma. Svaki paralelogram ima dvije dijagonale.

Zadatak 1

Nacrtaj proizvoljan paralelogram, a zatim označi njegova tjemena i uglove.
Zapiši parove: susjedna tjemena, naspramna tjemena, susjedne uglove i naspramne uglove.
Nacrtaj njegove: a) visine, b) dijagonale.

Koristeći znakove podudarnosti trouglova, mogu se objasniti neka svojstva paralelograma koja si prethodno proučavao.

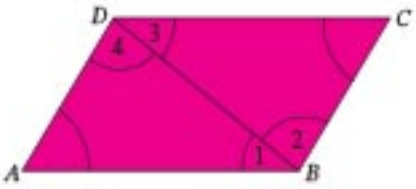
Razgledaj paralelogram $ABCD$ na crtežu 4a. Za trouglove ABD i CDB važi:

U: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ Kao naizmjenični uglovi transverzale BD paralelnih pravih AB i CD.
S: BD je zajednička stranica,
U: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ Kao naizmjenični uglovi transverzale BD paralelnih pravih AD i BC.
USU: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

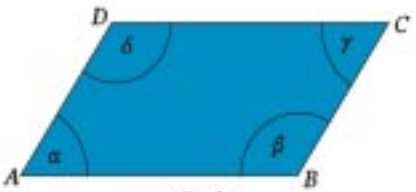
Iz podudarnosti trouglova ABD i CDB dobijamo da su odgovarajuće stranice i uglovi jednaki. Tačnije, jednaki su:

suprotne stranice $\overline{AB} = \overline{CD}$ i $\overline{AD} = \overline{CB}$ i
suprotni uglovi $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle ADC$.

Uglovi α i δ su suplementni uglovi, kao suprotni uglovi transverzale AD paralelnih pravih AB i CD (crtež 4b), odnosno $\alpha + \delta = 180°$.



crtež 4a

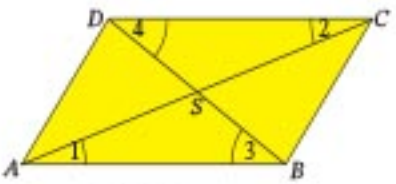


crtež 4b

- Svaka dijagonala dijeli paralelogram na dva podudarna trougla.
- U svakom paralelogramu, suprotne stranice su međusobno jednake.
- U svakom paralelogramu, suprotni uglovi su međusobno jednaki.
- U svakom paralelogramu, susjedni uglovi su suplementni.

Zadatak 2

Koristeći znakove podudarnosti trouglova, objasni zašto se u svakom paralelogramu dijagonale prepolovljavaju u tački presjeka.
Uputstvo: Odrediti da je $\Delta ABS \cong \Delta CDS$ (crtež 5).



crtež 5

Primjer 1

Izračunaj ostale uglove paralelograma ako je jedan od njegovih uglova 70°.

$\alpha = 70°$.
$\gamma = 70°$ Naspramni uglovi u paralelogramu su jednaki.
$\alpha + \beta = 180°$ Susjedni uglovi u paralelogramu su suplementni.
$70° + \beta = 180°$
$\beta = 110°$
$\delta = \beta = 110°$ Naspramni uglovi u paralelogramu su jednaki.

Zadatak 3

Novi staklenik gradi se u botaničkom parku. Osnova bašte treba da bude u obliku paralelograma *ABCD*. Arhitekta je obilježio tačke *A*, *B*, *C* i *D* na tlu i izmjerio da je ugao u tjemenu *A* 72°. Izračunaj uglove u paralelogramu.

Zadatak 4

Zbir dva suprotna ugla u datom paralelogramu je 142°. Izračunaj uglove u paralelogramu.

Pravougaonici, rombovi i kvadrati su paralelogrami, tako da se opšta svojstva paralelograma odnose i na njih. U nastavku ćemo predstaviti nekoliko posebnih svojstava pravougaonika, rombova i kvadrata koje možeš primijeniti u rješavanju problema.

Pravougaonik

Podsjeti se da se paralelogram u kojem su svi uglovi pravi naziva **pravougaonik**.
Crtež 6 prikazuje pravougaonik *ABCD* sa dijagonalama *AC* i *BD*.



crtež 6

Za trouglove *ABC* i *BAD* imamo:
S: *AB* je zajednička stranica,
U: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$ Paralelogram *ABCD* je pravougaonik.
S: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Kao suprotne stranice paralelograma.
SUS: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.
$\overline{AC} = \overline{BD}$ Kao odgovarajuće stranice podudarnih trouglova *ABC* i *BAD*.

Dijagonale u svakom pravougaoniku međusobno su jednake.

Na crtežu 7 dat je paralelogram $ABCD$ sa jednakim dijagonalama.



crtež 7

Za trouglove ABC i BAD imamo:

S: AB je zajednička stranica,

S: $\overline{AC} = \overline{BD}$, Prema uslovu za dijagonale paralelograma.

S: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Kao suprotne stranice paralelograma.

SSS: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ Kao odgovarajući uglovi u podudarnim trouglovima ABC i BAD.

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$ Kao susjedni uglovi u paralelogramu.

Od $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$, dobijamo da zadatak $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$.

Ako su dijagonale paralelograma jednake, onda je taj paralelogram pravougaonik.

Primjer 2

Dijagonale pravougaonika $ABCD$ sijeku se u tački S.

a) Napiši sve parove podudarnih trouglova čija su tjemena A, B, C, D ili S.

b) Koji od njih su jednakokraki, a koji pravougli trouglovi?

a) $\Delta ABS \cong \Delta DCS$, $\Delta BSC \cong \Delta ASD$, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$, $\Delta BAD \cong \Delta CDA$ i $\Delta DCB \cong \Delta CDA$.

b) Jednakokraki su: ΔABS, ΔDSC, ΔBSC i ΔASD.
Pravougli su: ΔABC, ΔBAD, ΔBCD i ΔCDA.

Primjer 3

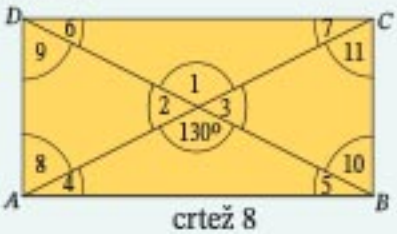
Veći ugao koji zaklapaju dijagonale AC i BD pravougaonika $ABCD$ je 130°.
Koji su uglovi koje dijagonale zaklapaju sa stranicama pravougaonika?

Označi sa S tačku presjeka dijagonala AC i BD. Sa crteža 8 vidimo da:

$\sphericalangle 1 = 130°$ Kao unakrsni uglovi

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 180° - 130° = 50°$ Kao paralelni uglovi.

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = 25°$ Kao uglovi na osnovici jednakokrakog trougla ABS.



crtež 8

$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 7 = 25°$ Kao uglovi na osnovici jednakokrakog trougla DSC

$\sphericalangle 8 = \sphericalangle 9 = 65°$ Kao uglovi na osnovici jednakokrakog trougla ASD.

$\sphericalangle 10 = \sphericalangle 11 = 65°$ Kao uglovi na osnovici jednakokrakog trougla BSC.

Zadatak 5

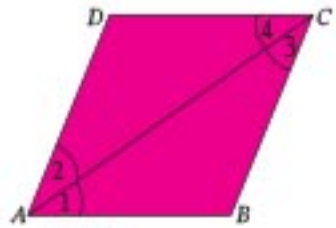
U pravougaoniku $ABCD$, ugao između dijagonale AC i stranice AD je 32°.
a) Izračunaj ugao između dijagonale AC i stranice BC.
b) Nađi ostale uglove koje dijagonala AC formira sa stranicama.
c) Koliki je ugao između dijagonala AC i BD?

Zadatak 6

U pravougaonoj prostoriji $ABCD$, od tačke A do suprotnog tjemena C na plafonu je postavljena traka. Traka zaklapa ugao od 52° sa stranicom AB.
a) Nacrtaj pravougaonik $ABCD$.
a) Koliki je ugao koji traka zaklapa sa stranicom AD?
b) Koliki je ugao između trake i stranice BC?

Romb

Podsjetimo se da se paralelogram u kojem su sve stranice jednake naziva **romb**.



crtež 9

Za romb $ABCD$ na crtežu 9, važi:

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ Kao suprotni uglovi u paralelogramu.

Za jednakokrake trouglove ABC i ADC, važi: crtež 9

S: AC je zajednička stranica,

S: $\overline{AB} = \overline{AD}$, Sve stranice romba su jednake.

S: $\overline{BC} = \overline{CD}$,

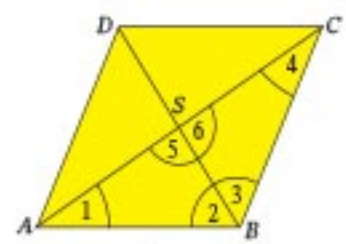
SSS: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ Kao odgovarajući uglovi podudarnih trouglova ABC i ADC.

Vidimo da je AC simetrala ugla u tjemenu A i ugla u tjemenu C.
Na sličan način, možemo da objasnimo da je BD simetrala ugla u tjemenu B i ugla u tjemenu D.

Dijagonale u svakom rombu su simetrale suprotnih uglova.

Na crtežu 10, dat je romb $ABCD$ sa dijagonalama AC i BD koje se sijeku u tački S.
Za trouglove ΔABS i ΔCBS, važi sljedeće:



crtež 10

S: BS je zajednička stranica,

S: $\overline{AB} = \overline{BC}$, Sve stranice romba su jednake.

S: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Dijagonale romba su prepolovljene.

SSS: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ Kao odgovarajući uglovi podudarnih trouglova ΔABS i ΔCBS.

Od $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ i $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 180°$, dobijamo da je $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 = 90°$.

Dijagonale AC i BD međusobno su normalne ($AC \perp BD$).

Dijagonale u svakom rombu međusobno su normalne.

Na crtežu 11 prikazan je paralelogram $ABCD$ sa međusobno normalnim dijagonalama AC i BD.
Za trouglove ΔABS i ΔCBS važi sljedeće:

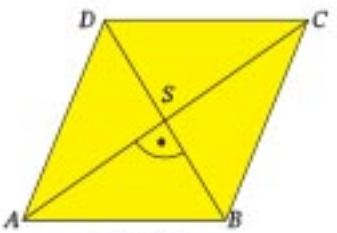
S: BS je zajednička stranica,

U: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSB = 90^\circ$, Prema uslovu za normalnost dijagonala paralelograma.

S: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Dijagonale paralelograma su prepolovljene.

SUS: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ Kao odgovarajuće stranice podudarnih trouglova ΔABS i ΔCBS.



crtež 11

Ako su u jednom paralelogramu dijagonale međusobno normalne, onda je to romb.

Zadatak 7

U rombu $ABCD$, tačke A_1, B_1, C_1 i D_1 su središta stranica AB, BC, CD i DA, odgovarajuće. Koja vrsta paralelograma dobija se spajanjem ovih tačaka? Objasni svoj odgovor.

Primjer 4

Izračunaj dužinu kraće dijagonale romba, ako je dužina stranice 5 cm, a jedan od njegovih uglova je 120°?

Romb $ABCD$ koji ispunjava uslove zadatka dat je na crtežu 12. Imamo:

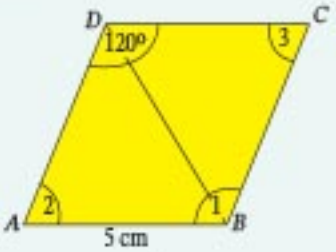
$\sphericalangle 1 = 120^\circ$ Kao suprotni uglovi u rombu.

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ Kao suprotni uglovi u rombu.

$120^\circ + 120^\circ + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 360^\circ$ Zbir uglova u rombu je 360°.

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120^\circ$

Iz $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120^\circ$ nalazimo da je $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 60^\circ$.

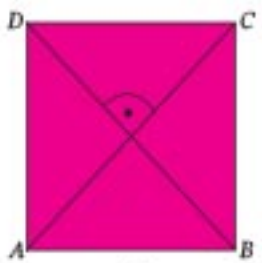


crtež 12

Trougao ABD je jednakostranični trougao, poput jednakokrakog trougla sa uglom pri vrhu od 60°. Stoga kraća dijagonala $\overline{BD} = 5\,\text{cm}$.

Kvadrat

Pošto je svaki kvadrat pravougaonik sa jednakim stranicama, a i romb sa pravim uglovima, sva svojstva koja važe za pravougaonike i rombove važe i za kvadrate. Pored toga, kvadrati imaju sljedeća dodatna svojstva.
Dijagonale u kvadratu su jednake, jer je pravougaonik, isto tako su i normalne, jer je i on romb (crtež 13).



crtež 13

- Dijagonale u svakom kvadratu su jednake i međusobno normalne.
- Ako su dijagonale u paralelogramu jednake i međusobno normalne, onda je to kvadrat.

Primjer 5

U muzeju se nalazi interaktivna izložba u kvadratnoj sali $ABCD$. U tjemenima A, B, C i D postavljeni su uređaji koji emituju laserske zrake.
Kada se izložba uključi, zrak se emituje iz tjemena A prema tjemenu C (duž dijagonale AC), a zrak se emituje iz tjemena B prema tjemenu D (duž dijagonale BD).
Uređaji su programirani tako da se svaki put kada se dva zraka presijeku, aktivira svjetlosni efekat.
a) Pod kojim uglom se sijeku zraci AC i BD?
b) Da li su dijagonale AC i BD jednake? Objasnite zašto.
c) Koji ugao zaklapa dijagonala AC sa stranicom AB?

Sala ima oblik kvadrata. Zato:
a) zraci AC i BD sijeku se pod pravim uglom,
b) dijagonale AC i BD su jednake,
c) dijagonala AC zaklapa ugao od $45°$ sa stranicom AB.

Zadatak 8

U kvadratu $ABCD$, tačke A_1, B_1, C_1 i D_1 su središta stranica AB, BC, CD i DA, odgovarajuće. Kakav paralelogram dobija se spajanjem ovih tačaka?

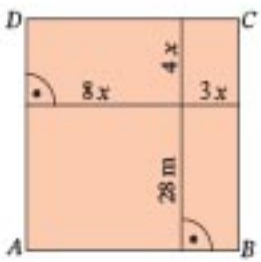
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Zbir dva suprotna ugla u paralelogramu je $94°$.
   Nađi veličinu svakog ugla paralelograma.
2. Izračunaj uglove paralelograma ako je poznato da je jedan od njegovih uglova 2 puta veći od drugog.
3. Veća dijagonala romba zaklapa ugao od $35°$ sa stranicom.
   Nađi uglove romba.
4. Nađi uglove romba ako je jedna od njegovih dijagonala jednaka stranici.
5. Stranica pravougaonika dužine 6 cm zaklapa ugao od $60°$ sa dijagonalom.
   Izračunaj dužinu dijagonale.
6. Dijagonale pravougaonika sijeku se pod uglom od $132°$.
   Izračunaj uglove između dijagonala i stranica pravougaonika.
7. Ugao između visine i stranice romba je $34°$. Izračunaj uglove romba.
8. Izračunaj uglove između dijagonala i stranica romba ako je jedan ugao romba $46°$.

9. Nađi uglove romba ako je ugao između visine i manje dijagonale 35°.

10. U pravougaoniku $ABCD$, tačka M je središte stranice AB. Kroz tačku M povučena je prava koja siječe stranicu CD u tački N tako da je ugao $\sphericalangle BMN = 75°$.
Nacrtaj crtež, a zatim izračunaj ugao: a) MNC, b) AMN.

11. Parcela kvadratnog oblika podijeljena je na dijelove kao na crtežu 14. Nađi dimenzije (stranice) parcele.



crtež 14

Istraživanje

Na stiropor postavi komad papira na kojem je nacrtana kvadratna mreža. Zatim postavi 4 iglice kao tjemena četverougla i zategni gumicu oko njih. Ispitaj svojstva paralelograma promjenom položaja iglica. Ispitaj kada je jedan četverougao paralelogram u zavisnosti od položaja presjeka dijagonala. Kada je taj paralelogram romb? Kakvu promjenu na dijagonalama paralelograma treba da napraviš da bi se dobio pravougaonik?

10. TRAPEZ I DELTOID

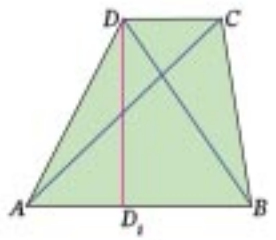
Aktivnost

Koji od datih četverouglova na crtežu 1 ima samo jedan par paralelnih stranica?



crtež 1

Podsjeti se da se četverougao koji ima samo jedan par paralelnih stranica naziva **trapez**.
Na crtežu 2 prikazan je trapez $ABCD$. Stranice AB i CD su paralelne i nazivaju se **osnovice** (gornja i donja osnovica), a stranice AD i BC nisu paralelne i nazivaju se **kraci** trapeza.
Rastojanje između paralelnih stranica naziva se **visina trapeza**.
Duž koja spaja dva suprotna tjemena naziva se **dijagonala trapeza**.
Duž DD_1 je visina trapeza, a duži AC i BD su dijagonale trapeza.



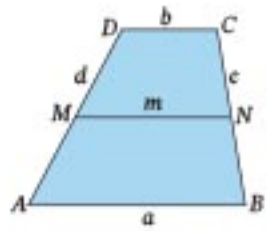
crtež 2

Ako sa M označimo središte kraka AD, a sa N središte kraka BC, onda je duž MN srednja linija trapeza $ABCD$ (crtež 3).

Dužine osnovica označene su sa $a = \overline{AB}$, $b = \overline{CD}$,

dužine krakova sa $c = \overline{BC}$ i $d = \overline{AD}$,

a dužina srednje linije sa $m = \overline{MN}$.



crtež 3

Duž koja spaja središnje tačke krakova trapeza naziva se **srednja linija** trapeza.

Zadatak 1

Nacrtaj proizvoljan trapez, a zatim nacrtaj:
a) visine, b) dijagonale, c) srednju liniju.

Srednja linija trapeza paralelna je sa osnovicama i njena dužina jednaka je polovini zbira dužina osnovica.

Prema tome, dužina srednje linije m trapeza izračunava se formulom

$$m = \frac{a+b}{2},$$

gdje su a i b osnovice trapeza.

Primjer 1

Izračunaj srednju liniju trapeza, ako su mu osnovice duge 8 cm i 5 cm.

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{8+5}{2} = 6{,}5\,\text{cm}$ Zamjenjujemo u formulu za srednju liniju trapeza.

Zadatak 2

Izračunaj dužinu srednje linije trapeza sa osnovicama:
a) $a = 17$ cm i $b = 11$ cm, b) $a = 4{,}2$ dm i $b = 28$ cm.

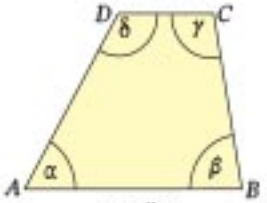
Zadatak 3

Osnovice trapeza razlikuju se za 10 cm. Izračunaj njihovu dužinu ako je dužina srednje linije $m = 15$ cm.

Uglovi α, β, γ i δ su unutrašnji uglovi trapeza $ABCD$ na crtežu 4.
Ako produžimo stranice trapeza do pravih linija, dobijamo:

$\alpha + \delta = 180°$ Kao suprotne uglove transverzale AD paralelnih pravih AB i DC.

$\beta + \gamma = 180°$ Kao suprotne uglove transverzale BC paralelnih pravih AB i DC.



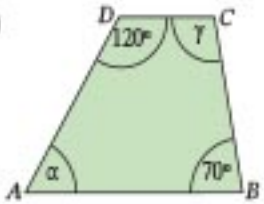
crtež 4

Uglovi koji leže na istom kraku trapeza su suplementni.

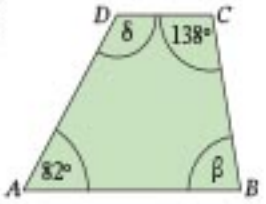
Primjer 2

Izračunaj uglove trapeza datog na slici 5:

a)



b)



crtež 5

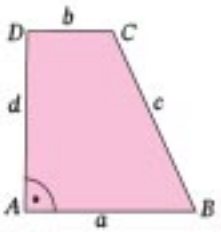
Pošto su uglovi koji leže na istom kraku suplementni, dobijamo:

a) $\alpha + 120° = 180°$, $\alpha = 60°$;
$70° + \gamma = 180°$, $\gamma = 110°$.

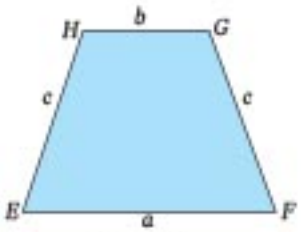
b) $\delta + 82° = 180°$, $\delta = 98°$;
$\beta + 138° = 180°$, $\beta = 42°$.

Trapez kod kojeg je jedan od krakova normalan na osnovice naziva se **pravougli trapez**.
Trapez sa jednakim krakovima naziva se **jednakokraki trapez**.

Na slici 6a prikazan je pravougli trapez, a slika 6b prikazuje jednakokraki trapez.



crtež 6a

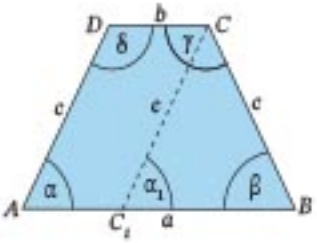


crtež 6b

Zadatak 4

Nacrtaj proizvoljan jednakokraki trapez, a zatim nacrtaj njegovu:
a) visinu b) dijagonale c) srednju liniju

Na crtežu 7 prikazan je jednakokraki trapez $ABCD$.
Duži CC_1 paralelnom sa AD, trapez je podijeljen na jednakokraki trougao C_1BC i paralelogram AC_1CD.



crtež 7

$\alpha_1 = \beta$ Kao uglovi na osnovici jednakokrakog trougla C_1BC.

$\alpha_1 = \alpha$ Kao podudarni uglovi na transverzali AB za paralelne prave C_1C i AD.

$\beta = \alpha$ Slijedi iz dvije gornje jednačine.

Uglovi u svakom jednakokrakom trapezu koji leže na istoj osnovici su jednaki.

Primjer 3

Izračunaj uglove u jednakokrakom trapezu $ABCD$, ako je jedan od njih $\alpha = 68°$ (crt. 8).

$\beta = \alpha = 68°$ Uglovi su jednaki kao uglovi koji leže na istoj osnovici AB.

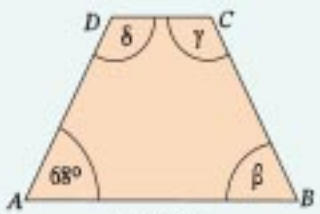
$\alpha + \delta = 180°$ Uglovi su suplementni kao uglovi koji leže na istom kraku AD.

$68° + \delta = 180°$ Zamjenjujemo i izračunavamo.

$\delta = 180° - 68°$

$\delta = 112°$.

$\gamma = \delta = 112°$ Uglovi su jednaki ako leže na istoj osnovici CD.



crtež 8

Zadatak 5

Zbir uglova koji leže na jednoj od osnovica jednakokrakog trapeza je 150° 20′.
Izračunaj ostale uglove na trapezu.

Na crtežu 9 dat je jednakokraki trapez $ABCD$.
Za trouglove ABC i BAD imamo:

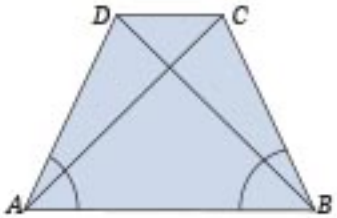
S: AB je zajednička stranica,

U: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$, Kao uglovi na osnovici AB jednakokrakog trapeza.

S: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Trapez $ABCD$ je jednakokraki prema uslovu u zadatku.

SUS: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\overline{AC} = \overline{BD}$ Kao odgovarajuće stranice u podudarnim trouglovima.

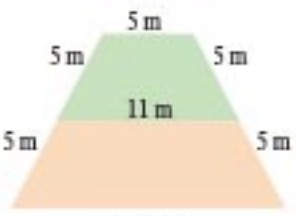


crtež 9

Dijagonale u jednakokrakom trapezu su jednake.

Primjer 4

Površina sa cvijećem u školskom dvorištu ima oblik jednakokrakog trapeza (slika 1). Gornja osnovica jednaka je krakovima i duga je 5 m, a donja osnovica duga je 11 m. Škola planira da proširi travnjak udvostručavanjem njegove dužine, a zatim ograđivanjem. Koliko metara ograde je potrebno za cijeli travnjak?



slika 1

Udvostručavanjem krakova dobijamo jednakokraki trapez sa srednjom linijom od 11 m.

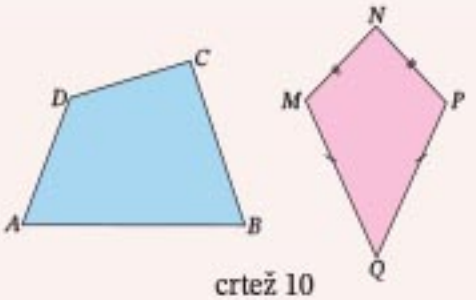
Prema tome, $11 = \frac{a+5}{2}$, $a = 2 \cdot 11 - 5 = 17$ m.

Obim travnjaka biće $L = 5 + 10 + 10 + 17 = 42$ m.

Deltoid

Aktivnost

Na crtežu 10 data su dva trapezoida $ABCD$ i $MNPQ$.
Oni nemaju nijedan par paralelnih stranica.
Koji od njih ima dva para jednakih
susjednih stranica?

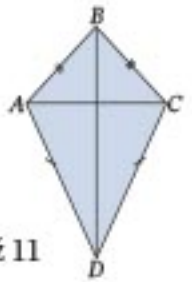


crtež 10

Sigurno si uočio da trapezoid $MNPQ$ ima po dvije susjedne stranice jednake, tj.
$\overline{MN} = \overline{PN}$ i $\overline{MQ} = \overline{PQ}$.

Trapezoid koji ima dva para jednakih susjednih stranica naziva se **deltoid**.

Za deltoid $ABCD$ na crtežu 11 imamo:
S: je zajednička stranica,
S: $\overline{AB} = \overline{CB}$,
S: $\overline{AD} = \overline{CD}$,
SSS: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

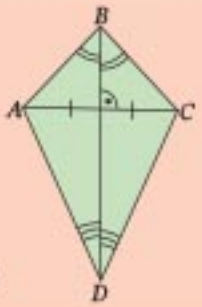


crtež 11

Dijagonala čije su krajnje tačke tjemena koja spajaju jednake stranice dijeli deltoid na dva podudarna trougla.

Iz podudarnosti ova dva trougla dobijamo svojstva koja slijede (crtež 12).

- Uglovi kod tjemena koja spajaju nejednake stranice su jednaki.
- Dijagonala čije su krajnje tačke tjemena koja spajaju jednake stranice simetrala je druge dijagonale.
- Dijagonala čije su krajnje tačke tjemena koja spajaju nejednake stranice dijeli deltoid na dva jednakokraka trougla.
- Dijagonale deltoida međusobno su normalne.



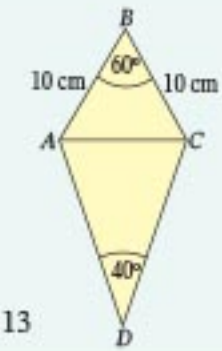
crtež 12

Primjer 5

Kraće stranice deltoida duge su 10 cm. Dva njegova suprotna ugla su 60° i 40°. Kolika je dužina kraće dijagonale? Nacrtaj crtež.

Deltoid *ABCD* koji ispunjava zahtjeve zadatka dat je na crtežu 13. Trougao *ACB* je jednakostranični trougao kao i jednakokraki trougao sa uglom pri vrhu od 60°.

Prema tome, kraća dijagonala je $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$.



crtež 13

Zadatak 7

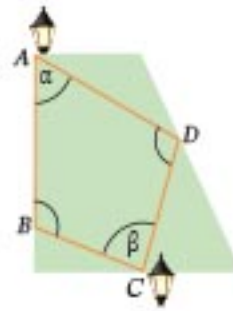
Dva nesusjedna ugla u deltoidu su 115° i 46°. Izračunaj preostale uglove.

Zadatak 8

Jedan od unutrašnjih uglova deltoida je 51°, a zbir jednakih uglova je 144°. Izračunaj uglove deltoida.

Zadatak 9

U parku, na travnjaku u obliku pravouglog trapeza, postavljene su svjetiljke u tačkama *A* i *C* (slika 2). Svjetiljka u tački *A* emituje svjetlost pod uglom $\alpha = 38°$, a svjetiljka u tački *C* pod uglom $\beta = 132°$. Koliki su uglovi pod kojima se sijeku kraci uglova α i β, ako presjek formira deltoid *ABCD*?



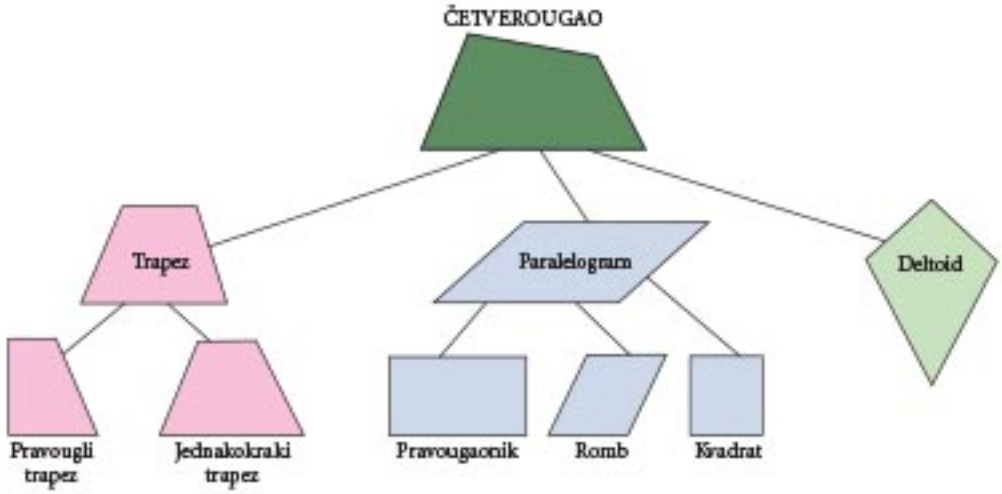
slika 2

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj srednju liniju trapeza sa osnovicama $a = 18{,}6$ cm i $b = 13{,}8$ cm.
2. Srednja linija trapeza je 7,3 cm, a jedna osnovica je 8,7 cm. Izračunaj drugu osnovicu.
3. Srednja linija jednakokrakog trapeza duga je 7 cm, a osnovice se razlikuju za 5 cm. Izračunaj dužine osnovica.
4. Obim trapeza sa stranicama dužine 3 cm i 4 cm iznosi 20 cm. Izračunaj dužinu srednje linije trapeza.
5. Zbir uglova koji leže na jednoj od osnovica pravouglog trapeza je 235°. Izračunaj preostale uglove trapeza.

6. Jedan od uglova na donjoj osnovici jednakokrakog trapeza je 45°, visina je 8 cm, a manja osnovica duga je 6 cm. Izračunaj dužinu veće osnovice trapeza.
7. Izračunaj uglove jednakokrakog trapeza, ako je dato da je ugao na manjoj osnovici dvostruko veći od ugla na većoj osnovici.
8. Izračunaj visinu jednakokrakog trapeza ako je jedan od njegovih unutrašnjih uglova 45°, a osnovice imaju dužine 9 cm i 5 cm.
9. U jednakokrakom trapezu $ABCD$, trougao ABC koji je formiran od duže osnovice, kraka i jedne od dijagonala trapeza je jednakokraki. Ako je ugao $BAC = 40°$, izračunaj ugao DAC.
10. Dva suprotna ugla u deltoidu su 51° i 86°. Izračunaj ostale uglove deltoida.
11. Jedan od unutrašnjih uglova deltoida je 47°, a zbir jednakih uglova je 236°. Nađi uglove deltoida.
12. **Projektni zadatak**
    Nacrtaj na hameru datu mapu uma. Popuni je tako što ćeš odgovore na pitanja zapisivati u odgovarajući četverougao.

ČETVEROUGAO Šta je četverougao? Koje dvije stranice su susjedne, a koje su suprotne? Koja dva tjemena su susjedna, a koja su suprotna? Koliki je zbir njegovih unutrašnjih uglova?	TRAPEZ Šta je trapez? Kako se zovu neparalelne stranice? Šta je srednja linija trapeza? Kakvi su uglovi koji leže na istom kraku?	DELTOID Kakve su njegove stranice? U kakvom su međusobnom odnosu dijagonale deltoida?
EDNAKOKRAKI TRAPEZ Kakvi su kraci međusobno? Kakvi su uglovi koji leže na istoj osnovici? Kakve su dijagonale međusobno?	PRAVOUGLI TRAPEZ Koji trapez se naziva pravougli?	PARALELOGRAM Šta je paralelogram? Kakve su njegove suprotne stranice međusobno? Kakvi su njegovi suprotni uglovi? Kakvi su mu susjedni uglovi? Kakve su dijagonale u odnosu na njihovu tačku presjeka?
PRAVOUGAONIK Kakve su dužine njegovih dijagonala? Kakvi su njegovi uglovi?	KVADRAT Kakve su dužine njegovih dijagonala? Kakve su dužine njegovih stranica? Kakvi su njegovi uglovi? Šta predstavlja dijagonala za suprotne uglove?	ROMB Kakve su dužine njegovih stranica? Pod kojim uglom se sijeku njegove dijagonale? Šta predstavlja dijagonala za suprotne uglove?



11. PRIMJENA PITAGORINE TEOREME U ČETVEROUGLOVIMA

Aktivnost

a) Navedi nazive četverouglova na crtežu 1.
b) Zapiši šta znaš o svakoj vrsti četverougla.

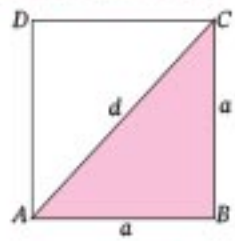


crtež 1

Pitagorina teorema nalazi primjenu i u zadacima o četverouglovima (kvadrati, pravougaonici, trapezoidi, rombovi itd.). Crtanjem nekih duži mogu se podijeliti na takve dijelove, među kojima će biti pravouglih trouglova. Ilustrovaćemo ovo u sljedećim zadacima. Za izračunavanja ćemo koristiti kalkulator i rezultat ćemo zaokružiti na dva decimalna mjesta.

Primjena Pitagorine teoreme na kvadrate, pravougaonike i rombove

Na crtežu 2 dat je kvadrat $ABCD$ sa stranicom a. Dijagonala d dijeli kvadrat na dva podudarna jednakokraka trougla.
To je hipotenuza svakog od njih.



crtež 2

Primjenom Pitagorine teoreme na svaki od njih, dobijamo formulu za izračunavanje dijagonale d kvadrata

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

gdje je a stranica kvadrata.

Primjer 1

Izračunaj dijagonalu d kvadrata sa stranicom $a = 9$ cm.

$d^2 = 2a^2,\ d^2 = 2 \cdot 9^2$ Zamjenjujemo u formulu za izračunavanje dijagonale kvadrata.

$d = 12{,}73$ cm Zaokružujemo na dvije decimale.

Primjer 2

Kolika je stranica kvadrata sa dijagonalom $d = 8$ cm?

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,\ a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32,\ a = \sqrt{32} = 5{,}66\,\text{cm}$$

Zadatak 1

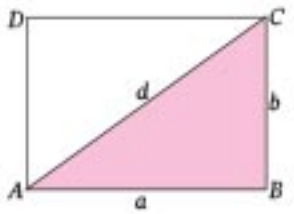
Izračunaj:

a) dijagonalu d kvadrata, ako je $a = 6$ cm, b) stranicu a kvadrata, ako je $d = 10$ cm.

Na crtežu 3 dat je pravougaonik $ABCD$ sa stranicama a i b. Dijagonala d dijeli pravougaonik na dva podudarna pravougla trougla. Ona je hipotenuza svakog od njih. Primjenom Pitagorine teoreme na svaki od njih, dobijamo formulu za izračunavanje dijagonale d pravougaonika,

$d^2 = a^2 + b^2$

gdje su a i b stranice pravougaonika.



crtež 3

Primjer 3

Izračunaj dijagonalu d pravougaonika sa stranicama $a = 20$ cm i $b = 40$ cm.

Zamjenjujemo u formulu za izračunavanje dijagonale pravougaonika.

$d^2 = a^2 + b^2 = 20^2 + 40^2 = 400 + 1600 = 2000,$

$d = \sqrt{2000} = 44{,}72\,\text{cm}.$

Primjer 4

Izračunaj stranicu a pravougaonika, ako je $d = 16$ cm i $b = 7$ cm.

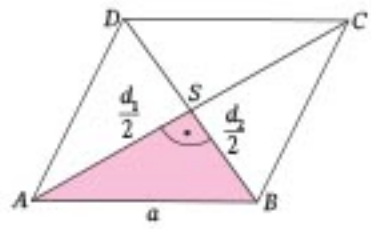
$d^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = d^2 - b^2 = 16^2 - 7^2 = 256 - 49 = 207$, $a = 14{,}39$ cm.

Primjer 5

Košarkaš visok 2,1 m dobio je hotelski krevet dužine 2 m i širine 1 m.
Da li se košarkaš može ispružiti na krevetu?

Dijagonala hotelskog kreveta je $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5^2} = 2{,}24\,\text{m}$.
Pošto je 2,1 m < 2,24 m, košarkaš će moći da se ispruži na krevetu.

Na crtežu 7 dat je romb $ABCD$ sa stranicom a i dijagonalama d_1 i d_2.
Podsjeti se da se dijagonale romba sijeku, dijele napola
i da su normalne jedna na drugu. Shodno tome,
one dijele romb na četiri pravougla trougla.
Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ASB,
dobijamo formulu za izračunavanje stranice a romba,



crtež 4

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

gdje su d_1 i d_2 dijagonale romba.

Primjer 6

Izračunaj obim romba čije su dijagonale 24 cm i 10 cm.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \quad a = \sqrt{169} = 13\,\text{cm}.$$

Obim je $L = 4a = 52$ cm.

Zadatak 2

Izračunaj veću dijagonalu romba sa stranicom $a = 5$ cm, ako je manja dijagonala $d_2 = 3$ cm.

Primjer 7

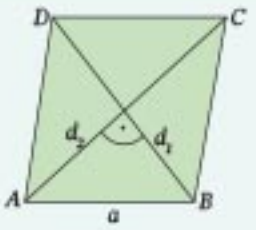
Mile treba ogradom da podijeli napola travnjak u obliku romba, duž manje dijagonale d_1 (crtež 5).
Koliko metara ograde treba da kupi, znajući da je druga dijagonala $d_2 = 80$ m, a stranica $a = 41$ m?

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 41^2 - \left(\frac{80}{2}\right)^2 = 1681 - 1600 = 81$$

$$\frac{d_1}{2} = 9$$

$d_1 = 18$ m.

Mile treba da kupi $2 \cdot 41 + 18 = 100$ m ograde.



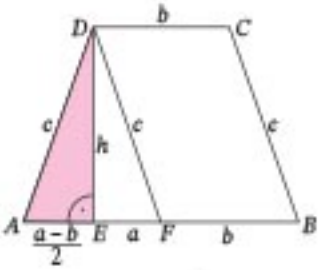
crtež 5

Primjena Pitagorine teoreme na trapez i deltoid

Dužinom DF paralelnom sa krakom BC, jednakokraki trapez podijeljen je na paralelogram $BCDF$ i jednakokraki trougao AFD, sa osnovicom $a - b$ i visinom h (crtež 6).
Visina DE dijeli jednakokraki trougao AFD na dva podudarna pravougla trougla. Primjenom Pitagorine teoreme na svaki od njih, dobijamo formulu za krak c jednakokrakog trapeza,

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

gdje je h visina, a a i b su osnovice trapeza.



crtež 6

Primjer 8

Izračunaj visinu jednakokrakog trapeza, ako su osnovice $a = 10$ cm i $b = 4$ cm i dužina kraka $c = 5$ cm.

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2 - \left(\frac{10-4}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$h = 4$ cm.

Zadatak 3

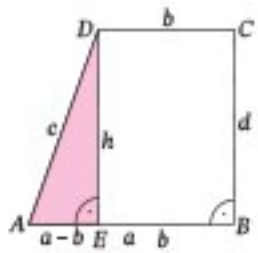
Izračunaj obim jednakokrakog trapeza sa osnovicama $a = 18$ cm i $b = 8$ cm i visinom $h = 12$ cm.

Uputstvo: Obim jednakokrakog trapeza izračunava se pomoću formule $L = a + b + 2c$, gdje su a i b osnovice, a c je krak jednakokrakog trapeza.

Na crtežu 7 prikazan je pravougli trapez $ABCD$ sa osnovicama a i b i visinom h. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao AED, dobijamo formulu za izračunavanje kraka c pravouglog trapeza,

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2$$

gdje je h visina, a a i b su osnovice trapeza.



crtež 7

Primjer 9

Izračunaj visinu pravouglog trapeza sa osnovicama $a = 10$ cm i $b = 6$ cm, i krakom $c = 12$ cm.

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2,\ h^2 = c^2 - (a-b)^2 = 12^2 - (10-6)^2 = 128$$

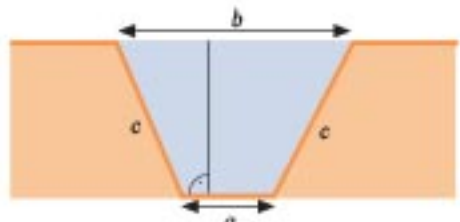
$$h = \sqrt{128} = 11{,}31\,\text{cm}.$$

Zadatak 4

Izračunaj obim pravouglog trapeza sa osnovicama $a = 12$ cm i $b = 9$ cm, i visinom $h = 4$ cm.
Uputstvo: Obim pravouglog trapeza izračunava se pomoću formule $L = a + b + c + d$, gdje su a i b osnovice, a c i d stranice pravouglog trapeza.

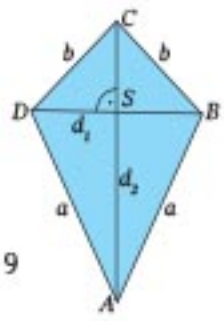
Zadatak 5

Kanal ima dubinu od 2,4 m i širinu a širinu $b = 3{,}2$ m (crtež 8). Koliko metara je širina a na dnu kanala, ako su bočni zidovi dužine $c = 25$ dm?



crtež 8

Na crtežu 9 prikazan je deltoid $ABCD$ sa stranicama a i b, i dijagonalama d_1 i d_2. Podsjeti se da su dijagonale deltoida međusobno normalne. One dijele deltoid na četiri pravougla trougla.



crtež 9

Primjer 10

Izračunaj dijagonale deltoida $ABCD$ prema podacima na crtežu 10.

Prema podacima na crtežu:

$d_1 = \overline{BD} = 2 \cdot 2 = 4\,\text{cm}$

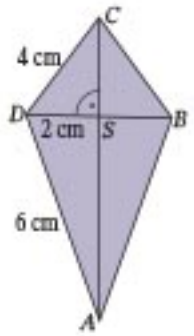
$\overline{CS}^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$\overline{CS} = \sqrt{12} = 3{,}46\,\text{cm}$

$\overline{AS}^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

$\overline{AS} = \sqrt{32} = 5{,}66\,\text{cm}$

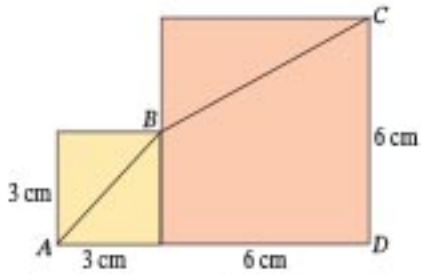
$d_2 = \overline{AS} + \overline{CS} = 5{,}66 + 3{,}46 = 9{,}12\,\text{cm}$.



crtež 10

Zadatak 6

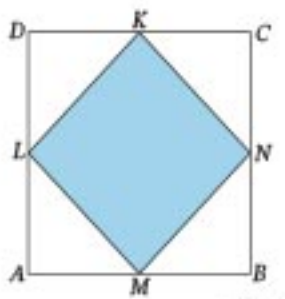
Dva kvadrata sa stranicama 3 cm i 6 cm postavljena su jedan pored drugog kao na crtežu 11.
Izračunaj obim četverougla $ABCD$.



crtež 11

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj dužinu dijagonale pravougaonika čije su stranice
   a) $a = 2{,}4$ cm i $b = 3{,}2$ cm, b) $a = 14$ cm i $b = 48$ cm.
2. Izračunaj dužinu dijagonale kvadrata čija je stranica $a = 7{,}5$ cm.
3. Izračunaj obim romba sa dijagonalama: a) 48 cm i 64 cm, b) 66 cm i 88 cm.
4. Nađi dijagonalu d_2 romba ako su stranica i druga dijagonala:
   a) $a = 26$ cm i $d_1 = 48$ cm, b) $a = 30$ cm i $d_1 = 36$ cm.
5. Kvadrat $ABCD$ ima stranicu od 8 cm. U njega je upisan drugi kvadrat $MNKL$, čija tjemena leže na sredinama stranica datog kvadrata. Izračunaj obim kvadrata $MNKL$ (crtež 12).



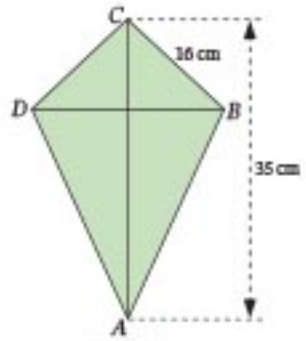
crtež 12

6. Ivan je kupio okrugli sto prečnika 230 cm. Da li će moći da ga unese u kuću kroz ulazna vrata koja su visoka 2 m i široka 90 cm?
7. Visina romba je 3 cm, a oštar ugao je 45°. Izračunaj obim romba.
8. Osnovice jednakokrakog trapeza su $a = 42$ cm i $b = 24$ cm, a njegov krak je dug 41 cm. Izračunaj visinu trapeza.
9. Dvije osnovice pravouglog trapeza duge su 5 cm i 10 cm, a njegov duži krak ima dužinu 13 cm. Izračunaj visinu trapeza.

10. Izračunaj obim jednakokrakog trapeza sa osnovicama $a = 23$ cm i $b = 11$ cm i visinom $h = 8$ cm.

11. Manja dijagonala dijeli deltoid na jednakostranični trougao sa stranicom 10 cm i sa visinom 12 cm. Izračunaj stranice deltoida.

12. Emran pravi avion u obliku deltoida kao na crtežu 13. On želi da zalijepi crvenu traku duž ivica. Koliko centimetara trake će mu biti potrebno?



crtež 13

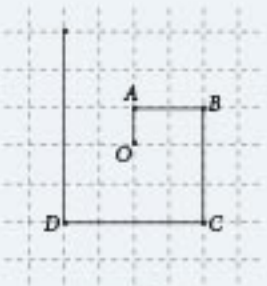
Istraživanje

Zbog kvara na svom avionu, pilot Luka bio je primoran da sleti u pustinju. Znao je da se u blizini nalazi selo, ali nije znao u kojem pravcu se selo nalazi i koliko je daleko.

Pošto je vidljivost bila do $\sqrt{2} \approx 1,41$km, mogao je da vidi selo na udaljenosti od najviše 1,41 km. Koristeći kompas, Luka je krenuo pješice da traži selo na sljedeći način. Iz aviona označenog sa O, prešao je 1 km sjeverno (do tačke A), 2 km istočno (do tačke B), 3 km južno (do tačke C), 4 km zapadno (do tačke D), 5 km sjeverno (do tačke F), 6 km istočno, itd. (crtež 14).

a) Zašto će Luka na ovaj način sa sigurnošću pronaći selo?

b) Ako je vidljivost bila do 1 km, a Luka je išao po istoj šemi, da li je sigurno da će pronaći selo?



crtež 14

12. KONSTRUKTIVNI ZADACI

Aktivnost

1. Konstruiši trougao, ako je dato:
   a) stranice $b = 5$ cm i $c = 3$ cm i ugao između njih $\alpha = 55°$,
   b) stranica $a = 5$ cm i uglovi $\beta = 55°$ i $\gamma = 60°$ koji leže na njoj,
   c) stranice $a = 6$ cm, $b = 5$ cm i $c = 4$ cm.
2. a) Koliko nezavisnih elemenata je potrebno za konstruisanje trougla? Da li postoji barem jedan dužinski element među elementima? Koliko je nezavisnih elemenata, uključujući barem jedan dužinski element, potrebno za konstruisanje jednakokrakog trougla ili pravouglog trougla, a koliko za konstruisanje jednakostraničnog trougla?

b) Paralelogram je podijeljen na dva podudarna trougla crtanjem jedne od njegovih dijagonala. Koliko nezavisnih elemenata, uključujući barem jedan po dužini, bilo bi potrebno da se konstruiše paralelogram? Koliko nezavisnih elemenata, uključujući barem jedan dužinski, bilo bi potrebno da se konstruiše romb, pravougaonik ili kvadrat?

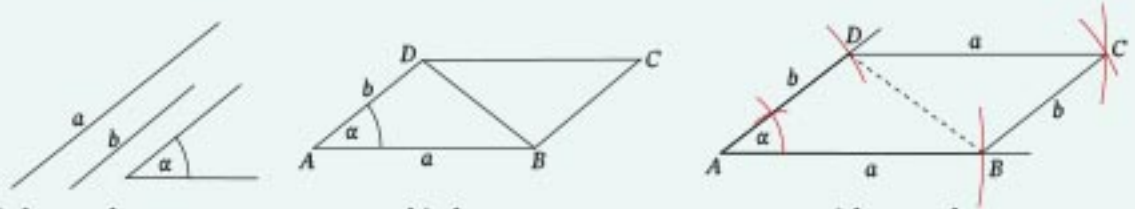
Konstrukcije paralelograma

Ako tačno odgovoriš na pitanja, sigurno ćeš vidjeti da su za **konstrukciju paralelograma** potrebna najviše tri nezavisna elementa, među kojima je bar jedna data dužina.
Koristeći osnovne konstrukcije trougla i svojstva paralelograma koja proizlaze iz znakova podudarnosti trouglova SAS, ASA i SSS, veoma lako i jednostavno ćemo izvršiti sljedeće konstrukcije paralelograma.

Primjer 1

Konstruiši paralelogram $ABCD$, ako su date dvije susjedne stranice a i b i ugao α između njih.

Konstrukcija se vrši tako što se prvo konstruiše trougao ABD sa datim stranicama a i b i uglom α između njih. Zatim, iznad dijagonale BD, konstruišite trougao BDC sa tri date stranice. Tako dobijamo paralelogram $ABCD$ (crtež 1).
Postoji samo jedan takav paralelogram.



a) dati podaci b) skica c) konstrukcija

crtež 1

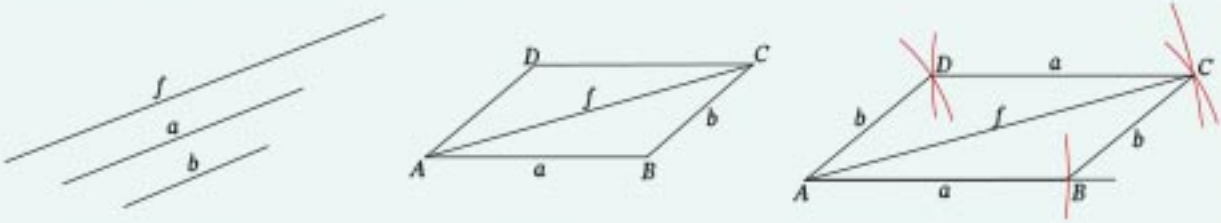
Zadatak 1

Konstruiši paralelogram $ABCD$, ako su date dvije susjedne stranice $a = 5$ cm i $b = 3$ cm i ugao između njih $\alpha = 60°$.

Primjer 2

Konstruiši paralelogram $ABCD$, ako su date dvije susjedne stranice a i b i jedna od njegovih dijagonala f.

Konstrukcija se vrši tako što se prvo konstruiše trougao *ABC*. Zatim se, iznad dijagonale *AC*, konstruiše trougao *ACD* sa tri date stranice. Tako dobijamo paralelogram *ABCD* (crtež 2). Postoji samo jedan takav paralelogram.



a) dati podaci b) skica c) konstrukcija

crtež 2

Zadatak 2

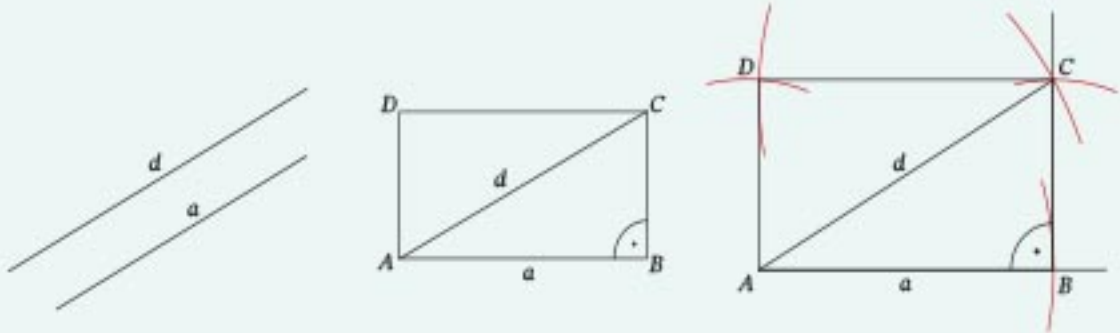
Konstruiši paralelogram sa datim stranicama $a = 4$ cm i $b = 3$ cm i dijagonalom $f = 6$ cm.

Za konstrukciju pravougaonika ili romba potrebna i dovoljna su dva elementa, među kojima je bar jedna data dužina, a za konstrukciju kvadrata potreban je samo jedan element, data dužina.

Primjer 3

Konstruiši pravougaonik *ABCD*, ako su date jedna stranica a i dijagonala *d*.

Konstrukcija se vrši tako što prvo konstruišemo pravougli trougao *ABC* sa katetom a i hipotenuzom *d*. Zatim, iznad dijagonale *AC*, konstruišemo trougao *ACD* sa tri date stranice. Tako dobijamo pravougaonik *ABCD* (crtež 3). Postoji samo jedan takav pravougaonik.



a) dati podaci b) skica c) konstrukcija

crtež 3

Zadatak 3

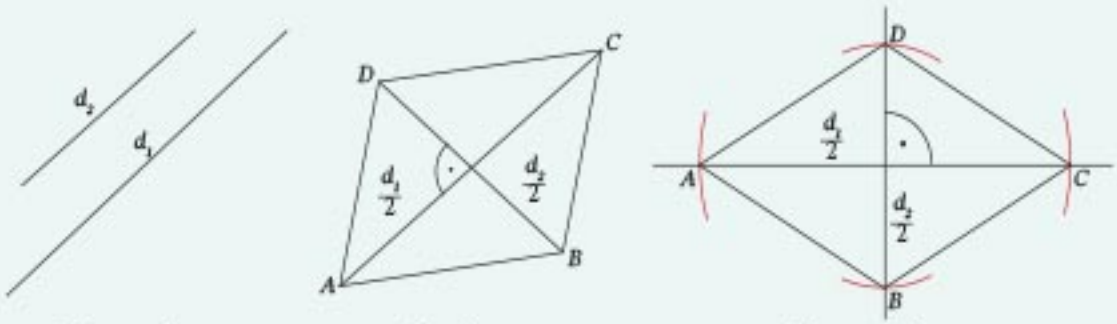
Konstruiši pravougaonik *ABCD*, ako je dato:
a) stranica $b = 3$ cm i dijagonala $d = 5$ cm,
b) dijagonala $d = 5$ cm i ugao između dijagonala $\alpha = 40°$.

Uputstvo: Nacrtaj skicu traženog pravougaonika. Zatim nacrtaj ugao α i produži njegove stranice do pravih. Iskoristi svojstvo da su dijagonale pravougaonika jednake i da se sijeku.

Primjer 4

Konstruiši romb $ABCD$, ako su date dvije dijagonale d_1 i d_2.

Prvo konstruišemo dvije međusobno normalne prave. Iz tačke presjeka prenosimo duž jedne prave polovinu jedne dijagonale, a duž druge prave polovinu druge dijagonale. Tako se dobijaju tačke A, B, C i D na crtežu 4. Njihovim spajanjem dobijamo romb $ABCD$. Postoji samo jedan takav romb.



a) dati podaci b) skica c) konstrukcija

crtež 4

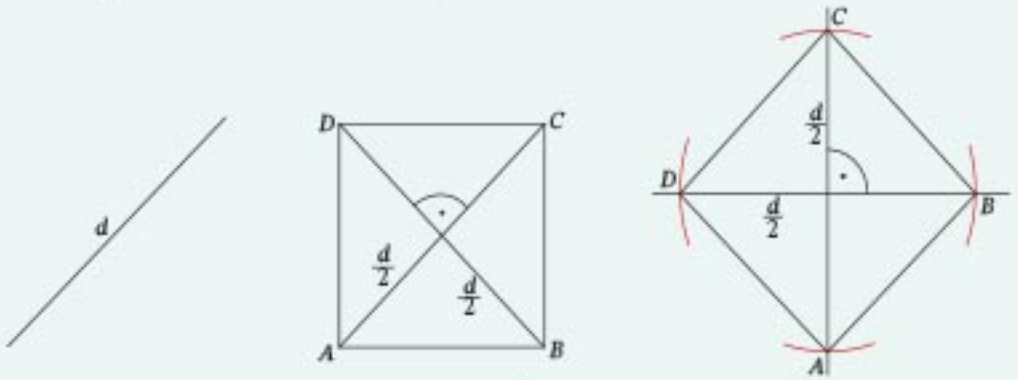
Zadatak 4

Konstruiši romb $ABCD$, ako je dato:
a) stranica $a = 3$ cm i jedna dijagonala $d_2 = 5$ cm,
b) obje dijagonale $d_1 = 10$ cm i $d_2 = 64$ mm.

Primjer 5

Konstruiši kvadrat $ABCD$ sa datom dijagonalom d.

Prvo konstruišemo dvije međusobno normalne prave. Iz tačke presjeka prenosimo jednu polovinu dijagonale duž obje prave. Tako dobijamo tačke A, B, C i D na crtežu 5. Njihovim spajanjem dobijamo kvadrat $ABCD$. Postoji samo jedan takav kvadrat.



crtež 5

Zadatak 5

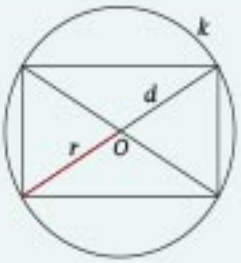
Konstruiši kvadrat sa stranicom $a = 3{,}5$ cm.

Konstrukcije opisane i upisane kružnice

Primjer 6

Opiši krug k oko datog pravougaonika sa dijagonalom d.

a) Slika 6 prikazuje pravougaonik sa dijagonalom d. Prema svojstvima pravougaonika, presjek njegovih dijagonala O jednako je udaljen od svih njegovih tjemena.
Zato konstruišemo krug k sa centrom u O i poluprečnikom r jednakim polovini dijagonale, odnosno $r = \frac{d}{2}$.
Kružnica $k(O, r)$ prolazi kroz svako tjeme pravougaonika, tj. to је opisana kružnica oko pravougaonika.
Постои единствена таква кружница.



crtež 6

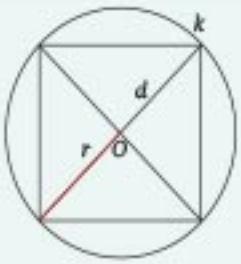
Zadatak 6

a) Opiši krug k oko kvadrata sa dijagonalom d.
b) Upiši krug k u kvadrat sa stranicom a.

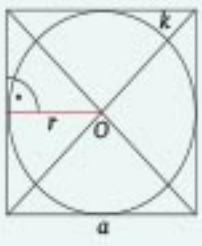
Primjer 7

a) Опиши кружница k околу квадратот со дијагонала d.
b) Впиши кружница k во квадратот со страна a.

a) Na crtežu 7a dat je kvadrat sa dijagonalom d. Prema svojstvima kvadrata, presjek njegovih dijagonala O jednako je udaljen od svih njegovih tjemena. Zato konstruišemo krug k sa centrom O i poluprečnikom r jednakim polovini dijagonale, tj. $r = \frac{d}{2}$.
Krug $k(O, r)$ prolazi kroz svako tjeme kvadrata, tj. oko kvadrata je opisana kružnica. Postoji samo jedna takva kružnica.



crtež 7a



crtež 7b

b) Na crtežu 7b prikazan je kvadrat sa stranicom a. Presjek njegovih dijagonala O jednako je udaljen od njegovih stranica. Stoga je poluprečnik r upisanog kruga k jednak polovini njegove stranice, tj. $r = \frac{a}{2}$
Krug $k(O, r)$ dodiruje sve njegove stranice, odnosno to je upisana kružnica u kvadratu.
Postoji samo jedna takva kružnica.

Zadatak 7

a) Opiši kružnicu k oko kvadrata sa stranicom $a = 4$ cm.
b) Upiši krug k u kvadrat sa stranicom $a = 5$ cm.

Zadatak 8

Arhitekte projektuju novi dio gradskog parka. Sastoji se od dva dijela koja su opisali samo riječima. Prvi dio je cvjetna leja u obliku pravougaonika sa svjetlećom kružnicom koja prolazi kroz svako tjeme pravougaonika. Drugi dio ima oblik kvadrata i sadrži fontanu koja dodiruje svaku stranicu kvadrata i svjetleću kružnicu koja prolazi kroz svako tjeme kvadrata. Konstruiši dijelove koje su arhitekte opisale.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Konstruiši paralelogram $ABCD$ sa datim:
   a) stranicama $a = 3$ cm, $b = 6$ cm i dijagonalom $f = 4$ cm,
   b) dijagonalama $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm i uglom između njih $\alpha = 75°$.

2. Konstruiši romb $ABCD$, ako su date:
   a) dijagonale $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm,
   b) stranica $a = 5$ cm i oštar ugao 45°,
   c) stranica $a = 4$ cm i visina $h = 3$ cm,
   č) dijagonala $d_1 = 7$ cm i visina $h = 4$ cm.

3. Konstruiši pravougaonik $ABCD$ sa datim:
   a) stranicama $a = 4{,}5$ cm i $b = 3$ cm,
   b) stranica $b = 3{,}5$ cm i dijagonala $d = 5{,}5$ cm.

4. Opština je odlučila da izgradi mali botanički park koji se sastoji od četiri susjedne parcele različitih oblika: paralelogram, romb, pravougaonik i kvadrat.
   Arhitekta je ostavio samo sljedeće opisne bilješke.
   - Parcela A ima dva para paralelnih stranica dužine 8 m i 6 m.
     Susjedne stranice nisu jednake. U ovom dijelu planirana je sadnja aromatičnih biljaka.
   - Parcela B ima četiri jednake stranice od po 7 m, a jedna dijagonala je duža od druge.
     U ovom dijelu planirana je sadnja ruža u kružnom rasporedu.
   - Parcela V ima uglove od 90°, a susjedne stranice duge su 5 m i 9 m.
     Ovaj dio će se koristiti za postavljanje klupa.
   - Parcela G ima četiri stranice od 6 m i svi uglovi su pravi. Ovo će biti dječiji kutak sa pijeskom.

   Prepoznaj ih, a zatim koristeći razmjeru konstruiši oblike koje je opisao arhitekta.

5. Opiši kružnicu k oko pravougaonika sa stranicom $a = 3$ cm i dijagonalom $d = 5$ cm.

6. Upiši krug k u kvadrat sa datom stranicom $a = 4$ cm.

7. Opiši krug k oko kvadrata sa datom dijagonalom $d = 6$ cm.

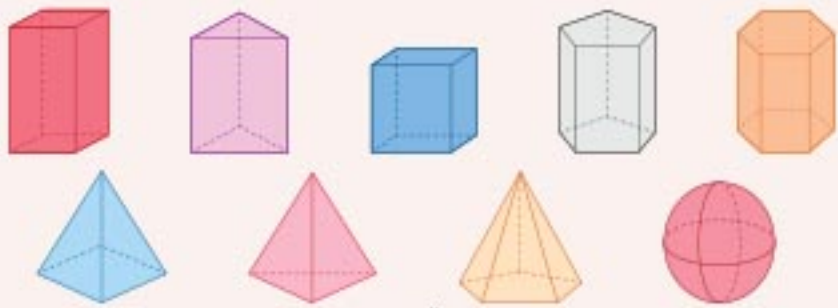
Istraživanje

1. Andrej je nacrtao kružnicu, ali nije označio centar, a nije znao ni poluprečnik kružnice. Pomozite Andreju da pronađe centar i poluprečnik kruga. Ako imate priliku, koristite obrazovni softver da pomognete Andreju.
2. Arif pokušava da upiše kružnicu u pravougaonik koji nije kvadrat. Objasni zašto je Arif u zabludi.

13. POLIEDAR, LOPTA I SFERA

Aktivnost

Navedi nazive 3D-oblika na crtežu 1. Koji od njih su ivičasti, a koji valjkasti 3D oblici? Opiši kojim 2D oblicima je svaki od njih ograničen.



crtež 1

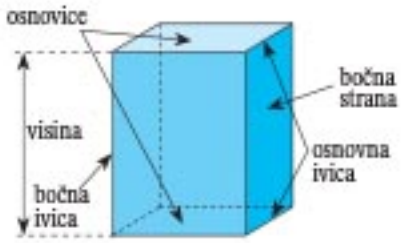
Trodimenzionalni oblici (3D) dio su prostora i proučava ih dio geometrije koji se naziva **stereometrija**, za razliku od dvodimenzionalnih 2D oblika koje izučava **planimetrija**. Jedan od najčešće korištenih 3D oblika je poliedar..

Poliedar je dio prostora ograničen poligonima (trouglovima, četverouglovima, petouglovima itd.).

Prilikom skiciranja poliedara, vidljive ivice crtaju se punom linijom, dok se nevidljive ivice crtaju isprekidanom linijom.
Do sada smo se upoznali sa dvije vrste poliedara: **prizmama** i **piramidama**.

Prizme imaju dvije podudarne paralelne osnovice koje su poligoni-mnogouglovi (crtež 2). Duži koje povezuju odgovarajuća tjemena osnovica međusobno su paralelne i nazivaju se **bočne ivice**. Ivice koje su dio osnovica, odnosno stranice osnovica, nazivaju se **osnovne ivice**.

Parovi osnovnih ivica, zajedno sa odgovarajućim bočnim ivicama, formiraju paralelograme, koji se nazivaju **bočne strane** prizme.
Za prizmu kažemo da je **prava prizma** ako su joj paralelne ivice normalne na obje osnovice.
Razmatraćemo samo pravougaone prizme. U zavisnosti od toga kakav mnogougao predstavljaju osnovice, prizma može biti trougaona, četverougaona itd.

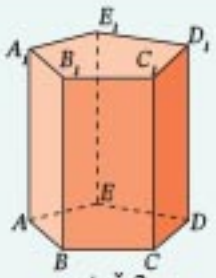


crtež 2

Primjer 1

Za petougaonu prizmu na crtežu 3, zapiši sve njene:
a) tjemena, b) bočne ivice, c) osnovne ivice, č) bočne strane, ć) osnovice.

a) Tjemena su tačke: $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1$ i E_1,
b) Bočne ivice su duži: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 i EE_1,
c) Osnovne ivice su duži:
$AB, BC, CD, ED, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$ i E_1A_1,
č) Bočni zidovi su pravougaonici:
$ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1$ i EAA_1E_1,
ć) Osnovice su petouglovi: $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$.



crtež 3

Ako su osnovice prave prizme pravilni poligoni-mnogouglovi, ta prizma se naziva **pravilna prizma**.
Rastojanje između osnovica prizme naziva se **visina** prizme i najčešće se označava sa H.

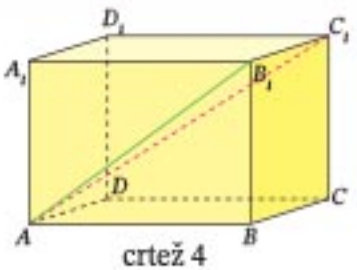
Zadatak 1

Koliko bočnih ivica ima: a) osmougaona prizma, b) dvanaestougaona prizma?

Dijagonala u poliedru naziva se **prostornom** ako spaja dva tjemena poliedra i ne pripada nijednoj strani poliedra.

Primjer 1

Kvadrati su prizme koje su ograničene sa tri para paralelnih pravougaonika. Na crtežu 4 dat je kvadrat $ABCDA_1B_1C_1D_1$ čije ivice imaju dužine a, b i c. Prostorna dijagonala je duž AC_1. Duž AB_1 nije prostorna dijagonala, jer je dio strane ABB_1A_1.



crtež 4

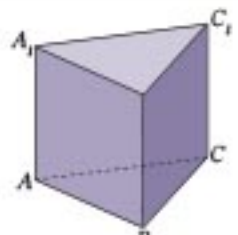
Zadatak 2

Navedi sve dijagonale kvadra na crtežu 4. Koje od njih su prostorne, a koje nisu?

Primjer 3

Na crtežu 5 data je trougaona prizma $ABCA_1B_1C_1$.
Objasni zašto ova prizma nema prostornu dijagonalu.

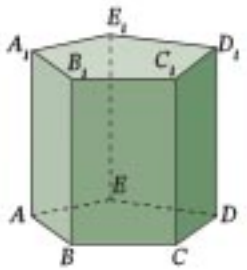
U datoj prizmi, svaka duž čije su krajnje tačke dva tjemena prizme leži na strani prizme ili predstavlja ivicu.



crtež 5

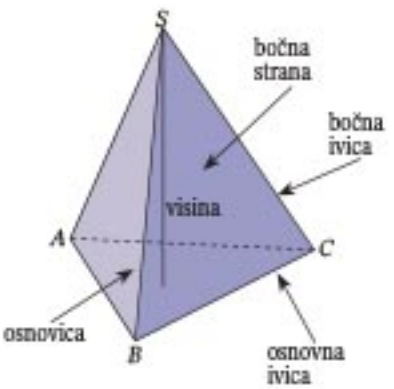
Zadatak 3

Napiši sve prostorne dijagonale prizme na crtežu 6.



crtež 6

Piramida ima mnogougao kao osnovicu i ima jedno tjeme nazvano **vrh** i koje ne leži u osnovici (crtež 7).
Duži koje spajaju vrh i tjemena osnovice nazivaju se **bočne ivice**.
Ivice koje su stranice osnovice nazivaju se **osnovne ivice**.
Svaka osnovna ivica, zajedno sa odgovarajuće dvije bočne ivice, formira trouglove, koji se nazivaju **bočne strane** piramide.
Piramide mogu biti trougaone, četverougaone itd. u zavisnosti od toga kakav mnogougao predstavlja njihovu osnovicu.



crtež 7

Primjer 4

Za trougaonu piramidu na crtežu 7:
a) zapiši sva njena: tjemena, bočne ivice, osnovne ivice, bočne strane,
b) zapiši vrh i osnovicu.

a) Tjemena su tačke A, B, C i S; bočne ivice su duži AS, BS i CS; osnovne ivice su duži AB, BC i CA; bočne strane su trouglovi ABS, BCS i CAS.
b) Vrh je tjeme S, a osnovica je trougao ABC.

Ako je osnovica piramide pravilan mnogougao i sve njene bočne ivice imaju istu dužinu, piramida se naziva **pravilna piramida.**
Rastojanje od vrha piramide do osnovice naziva se **visina** piramide i najčešće se označava sa H.
Trougaona piramida naziva se tetraedar, jer ima 4 tjemena. Međutim, tetraedar se često koristi da označi pravilnu trougaonu piramidu čije su strane jednakostranični trouglovi.

Zadatak 4

Koliko osnovnih ivica ima:
a) petougaona piramida, b) dvadesetougaona piramida.

Primjer 3

Da li postoji prostorna dijagonala u piramidi?

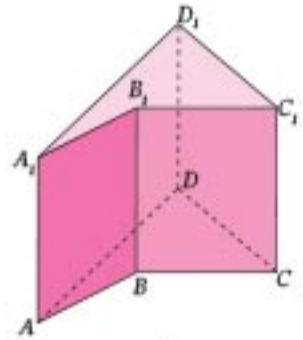
Duž koja spaja vrh piramide sa nekim od tjemena osnovice predstavlja ivicu piramide i ne može biti dijagonala. Duž koja spaja dva tjemena osnovice, po definiciji, nije prostorna dijagonala. Zato piramide nemaju prostorne dijagonale.

Primjer 4

Znamo da trougaona prizma nema prostorne dijagonale. Takođe znamo da piramide nemaju prostorne dijagonale. Ali ako postavimo pravilnu piramidu $A_1B_1C_1S$ na pravilnu trostranu prizmu $ABCA_1B_1C_1$, dobijamo poliedar koji nije ni prizma ni piramida. Ima tri prostorne dijagonale AS, BS i CS.

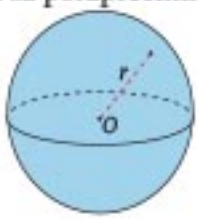
Kažemo da je poliedar **konveksan** ako duž koja povezuje bilo koje dvije tačke poliedra pripada poliedru.

Konveksni poliedri su, na primjer, trougaone prizme i trougaone piramide.
Na crtežu 8 prikazan je poliedar koji nije konveksan.
Na primjer, duž AC nije dio poliedra.

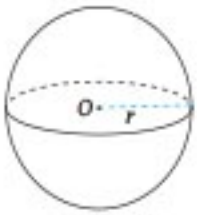


crtež 8

Lopta je skup svih tačaka u prostoru koje su na udaljenosti jednakoj ili manjoj od r od date tačke O. **Sfera** je skup tačaka u prostoru koje su na udaljenosti r od date tačke O.
Na crtežu 9 data je lopta sa poluprečnikom r, a na crtežu 10 data je sfera sa poluprečnikom r.



crtež 9



crtež 10

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Šta je poliedar, a šta konveksni poliedar? Nacrtaj konveksni poliedar.
2. Nacrtaj poliedar koji nije ni prizma ni piramida.
3. Nacrtaj šestougaonu prizmu i označi je. Zapiši sva njena:
   a) tjemena, b) bočne ivice, c) ivice osnovice,
   ć) bočne strane, e) osnovice.
4. Nacrtaj trougaonu prizmu i na njene dvije osnovice nacrtaj dvije pravilne trougaone piramide.
   Zatim nacrtaj u boji sve prostorne dijagonale dobijenog poliedra.
5. Nacrtaj sedmougaonu piramidu i označi je.
   a) zapiši sva njena: tjemena, bočne ivice, ivice osnovice, bočne strane,
   b) zapiši vrh i osnovicu.
6. Koliko ivica osnovice ima:
   a) desetougaona prizma, b) dvadesetougaona piramida?
7. Koliko tjemena ima:
   a) stougaona piramida, b) stougaona prizma?
8. Koliko bočnih ivica ima:
   a) devetougaona prizma, b) desetougaona piramida?
9. Od kojih 3D oblika je sastavljena kuća na crtežu 11?



crtež 11

10. Šta je lopta, a šta sfera? Navedi primjere lopti i sfera iz svog okruženja.

Istraživanje

Kakva piramida je Keopsova piramida u Egiptu? Da li je trougaona, četverougaona itd.?
Da li je pravilna piramida?
Potražite na internetu informacije o dimenzijama (ivicama) Keopsove piramide.
Napravi model Keopsove piramide od kartona u razmjeri 1 : 1000.

14. PRAVILNI POLIEDRI

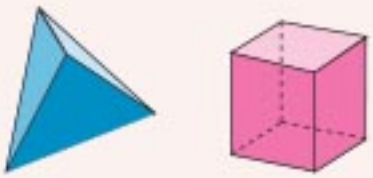
Aktivnost

1. Kako se naziva mnogougao sa jednakim stranicama i jednakim uglovima?
2. Koji su od mnogouglova na crtežu 1 pravilni, a koji nisu pravilni?



crtež 1

3. Kakvi mnogouglovi su strane kocke, a kakve su strane tetraedra na crtežu 2?



crtež 2

Ako si pažljivo pogledao/la, vidio/vidjela si da su strane tetraedra i kocke pravilni mnogouglovi. Tačnije, strane tetraedra su jednakostranični trouglovi, a strane kocke su kvadrati.

Kažemo da je poliedar **pravilan** ako su njegove strane pravilni i podudarni mnogouglovi.

Postoji samo pet vrsta pravilnih poliedara i bili su poznati starim matematičarima. Pravilni poliedri nazivaju se i Platonova tijela, po starom filozofu Platonu.
U sljedećoj tabeli date su sve vrste pravilnih poliedara. Naveden je broj tjemena, ivica i strana, kao i vrsta pravilnih mnogouglova koji ih prekrivaju.

	ime	tjemena	ivica	strana	vrsta pravilnog mnogougla	broj ivica po tjemenu
	tetraedar	4	6	4	jednakostranični trougao	3
	kocka	8	12	6	kvadrat	3
	oktaedar	6	12	8	jednakostranični trougao	4
	dodekaedar	20	30	12	pravilni petougao	3
	ikosaedar	12	30	20	jednakostranični trougao	5

Pojava pravilnih poliedara u prirodi je zanimljiva. Na primjer, adenovirus ima ljusku u obliku ikosaedra, izomeri bora formiraju tetraedarske, oktaedarske ili ikosaedarske oblike, a molekuli često imaju tetraedarsku ili oktaedarsku geometriju.
Dijamanti često kristališu u obliku oktaedara, a mineral pirit kristališe u obliku kocke, oktaedra ili dodekaedra (slika 1).



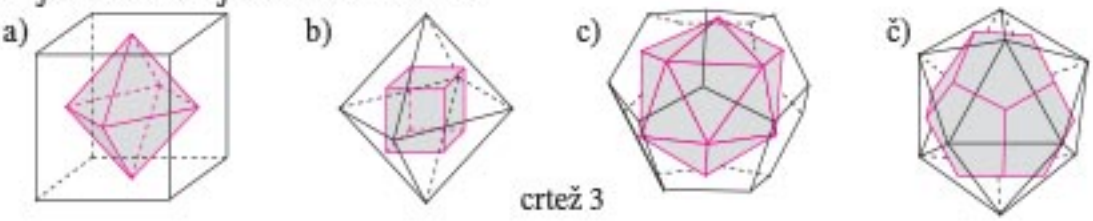
Adenovirus Dijamant Izomer bora Molekul Pirit

slika 1

ZADACI ZA VJEŽBANJE

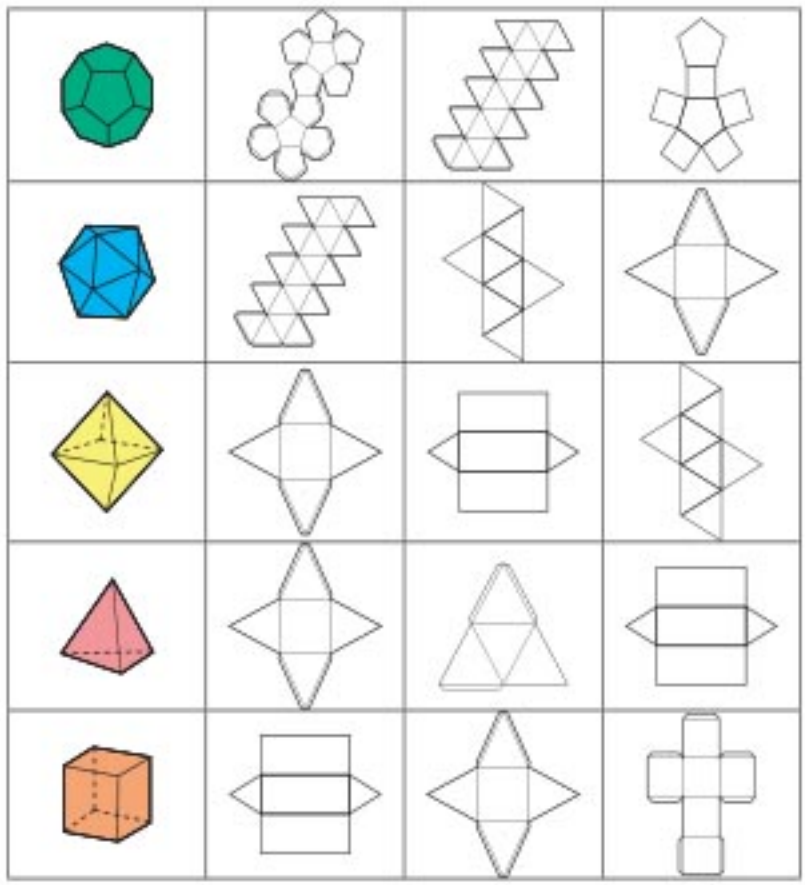
1. a) Navedi svih pet vrsta pravilnih poliedara.
b) Kojim pravilnim poligonima je prekriven svaki od njih?
c) Po koliko ivica izlazi iz svakog tjemena svakog od njih?

2. Koja Platonova tijela vidiš na crtežu 3:



crtež 3

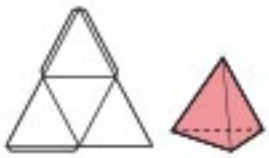
33. Koja od tri mreže odgovara svakom datom tijelu?

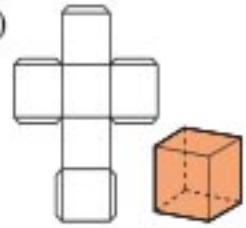


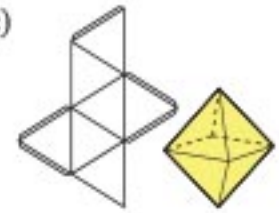
4. Projektna aktivnost

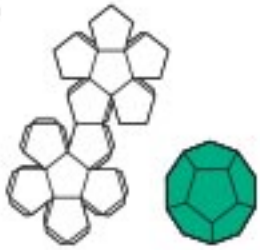
1) Prema datoj mreži i dimenzijama, napravite model tijela, ako je

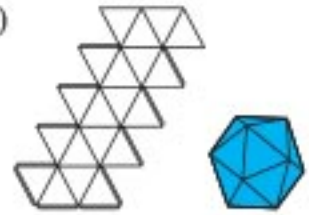
a) stranica trougla 7 cm, b) stranica kvadrata 5 cm,
c) stranica trougla 4 cm, č) stranica petougla je 3 cm,
ć) stranica trougla 2 cm.

a) 

b) 

c) 

č) 

ć) 

2) Nacrtaj tabelu na hameru, zapiši podatke za svaku sliku i zalijepi model u posljednji red.

					
ime					
strane					
ivice					
tjemena					
model					

Istraživanje

Otkriće Platonovih tijela počelo je definicijom tri tijela od strane grupe starogrčkih matematičara zvanih Pitagorejci, a starogrčki matematičar Platon definisao je posljednja dva. Platon je opisao pet tijela kao simbole pet osnovnih elemenata svijeta: vatre, vazduha, vode, zemlje i etra (univerzuma).

Istraži na internetu:

a) Koji element je Platon dodijelio kojem tijelu?
b) Kako je pritom objasnio simboliku?

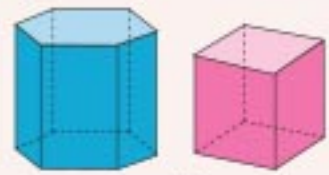
c) Kako je Johannes Kepler primijenio Platonova tijela u svom istraživanju?



15. VEZA IZMEĐU BROJA TJEMENA, IVICA I STRANA POLIEDRA

Aktivnost

Na crtežu 1 data su dva konveksna poliedra. Za svaki od njih prebroj njihova tjemena, oduzmi broj ivica i dodaj broj strana. Šta primjećuješ? Da li postoji veza između broja tjemena, ivica i strana datog poliedra?



crtež 1

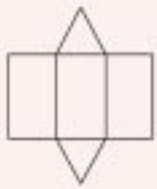
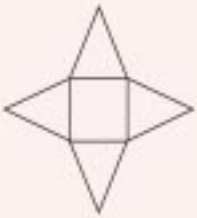
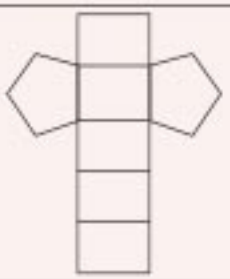
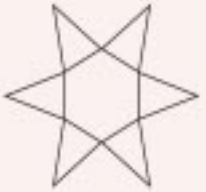
Za svaki konveksni poliedar važi **Ojlerova formula**:

$$V - E + F = 2$$

gdje je V broj tjemena, E je broj ivica, a F je broj strana datih poliedara.

Aktivnost

Precrtaj mreže poliedara date u tabeli na kartonu, isijeci ih i sastavi poliedre.
a) Odredi broj tjemena, ivica i strana svakog poliedra.
b) Provjeri Eulerovu formulu svakog poliedra.

trougaona prizma	četverougaona piramida	petougaona prizma	šestougaona piramida
			

Primjer 1

Provjeri Eulerovu formulu za:
a) trougaonu piramidu, b) četverougaonu prizmu, c) petougaonu piramidu.

a) trougaona piramida
$V = 4, E = 6$ i $F = 4$
$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$

b) četverougaona prizma
$V = 8, E = 12$ i $F = 6$
$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$

c) petougaona piramida
$V = 6, E = 10$ i $F = 6$
$V - E + F = 6 - 10 + 6 = 2$

Zadatak 1

Provjeri Eulerovu formulu za svako Platonovo tijelo:
a) tetraedar, b) kocka, c) oktaedar, č) dodekaedar, ć) ikosaedar.

Primjer 2

Koristeći Eulerovu formulu, provjeri da li postoji konveksni poliedar sa 6 tjemena, 12 ivica i 5 strana.

$V = 6, E = 12,$ i $F = 5$
$V - E + F = 6 - 12 + 5 \neq 2$ Ne postoji konveksni poliedar sa datim uslovima.

Zadatak 2

Da li postoji konveksni poliedar sa 20 tjemena, 40 ivica i 20 strana?

Eulerova formula koristi se za izračunavanje nepoznatog broja tjemena, ivica ili strana.

Primjer 3

Koliko strana ima konveksni poliedar sa 15 tjemena i 28 ivica?

Prema uslovu u zadatku V = 15 i E = 28. Zamjenom poznatih vrijednosti u Eulerovu formulu, dobijamo

$V - E + F = 2, \quad 15 - 28 + F = 2, F = 15.$

Dati konveksni poliedar ima 15 strana.

Zadatak 3

Koliko tjemena ima konveksni poliedar sa 40 ivica i 21 stranom?

Zadatak 4

Učenici prave dron sa tijelom u obliku poliedra sa 22 strane i 36 ivica.
Koliko tjemena ima tijelo drona?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koristeći Eulerovu formulu, provjeri da li postoji konveksni poliedar sa 7 tjemena, 18 ivica i 12 strana.
2. Konveksni poliedar ima 16 tjemena i 10 strana. Koliko ivica ima taj poliedar?
3. Koliko tjemena ima poliedar sa 36 ivica i 14 strana?
4. Nacrtaj poliedar sastavljen od kocke i pravilne četverougaone piramide koje imaju zajedničku stranu. Zatim za poliedar provjeri jednačinu $V - E + F = 2$.
5. Nacrtaj poliedar sastavljen od dvije četverougaone piramide koje imaju zajedničku osnovicu. Zatim za poliedar provjeri jednačinu $V - E + F = 2$.

Istraživanje

1. Da li poliedri prikazani na crtežu 2 nisu konveksni? Koliko „rupa" svaki od njih ima?
   a) Za svaki poliedar prebroj njegova tjemena, ivice i strane.
   b) Izračunaj vrijednost izraza $V - E + F$ za svaki poliedar.
   c) Da li formula $V - E + F = 2 - 2 \cdot d$ važi, gdje je d broj „rupa" u poliedru?
   č) Da li se vrijednost izraza $V - E + F$ smanjuje za 2 sa svakom novom rupom?



crtež 2

16. CRTANJE SLOŽENIH 3D-OBLIKA

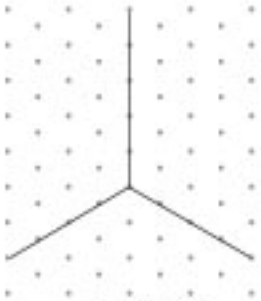
Za crtanje složenih 3D-oblika u ravni možemo koristiti **izometrijski papir**. Na njemu je nacrtana mreža formirana paralelnim redovima tačaka, tako da su svake dvije susjedne tačke u redu jednako udaljene, a sa najbližom tačkom u susjednom redu formiraju jednakostranični trougao. Važno je pravilno postaviti papir, tako da pomenuti redovi tačaka budu postavljeni vertikalno (crtež 1a), a ne horizontalno (crtež 1b). Ovo nam omogućava da postavimo koordinatni sistem sa tri ose, pod uglom od 120°, kao na crtežu 1v. Prilikom crtanja na izometrijskom papiru, odnosi između dimenzija nacrtanog 3D-oblika isti su kao i odnosi između dimenzija datog 3D-oblika.



crtež 1a



crtež 1b

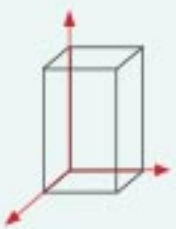


crtež 1c

Primjer 1

Na izometrijskom papiru nacrtaj kvadar dimenzija 3, 4 i 5 jedinica.

Na crtežu 2a data je skica kvadra. Na izometrijskom papiru crtamo koordinatni sistem sa osama pod uglom od 120°. Na koordinatnim osama nanosimo dužine ivica: 3, 4 i 5 jedinica, odgovarajuće (crtež 2b).



Crtež 2a



crtež 2b

Prema skici, crtamo tri vidljive vertikalne ivice (crtež 2c). Zatim crtamo sve preostale vidljive ivice koje su paralelne sa druge dvije ose (crtež 2č). Na kraju, crtamo nevidljive ivice isprekidanim ili tanjim linijama (crtež 2ć).



crtež 2c



crtež 2č



crtež 2ć

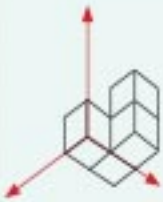
Primjer 2

Od koliko kocki se sastoji 3D oblik na crtežu 3?
Nacrtaj 3D oblik na izometrijskom papiru.



crtež 3

Trodimenzionalni oblik na slici 3 sastoji se od 4 kocke.
Crtež 4a prikazuje skicu 3D oblika.
Na izometrijskom papiru crtamo koordinatni sistem sa osama pod uglom od 120°.
Zatim, prema skici, crtamo prve tri ivice duž osa (crtež 4b).
Nastavljamo crtanjem vertikalnih ivica, prema skici (crtež 4c).
Zatim crtamo sve preostale ivice koje su paralelne sa druge dvije ose (crtež 4č).
Crtež 4e prikazuje izometrijski crtež datog 3D oblika.



crtež 4a



crtež 4b



crtež 4c



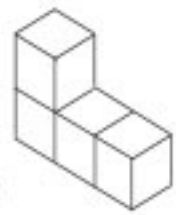
crtež 4č



crtež 4ć

Zadatak 1

Od koliko kocki se sastoji 3D oblik na crtežu 5?
Nacrtaj 3D oblik na izometrijskom papiru.



crtež 5

Zadatak 2

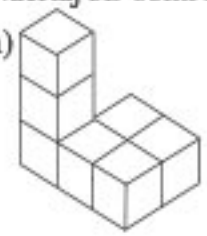
Nacrtaj saksije, prikazane na crtežu 8, na izometrijskom papiru:

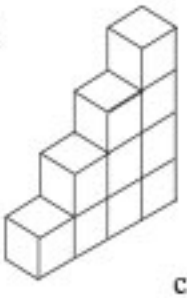


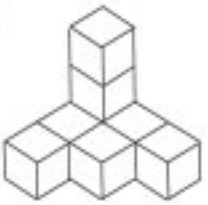
crtež 8

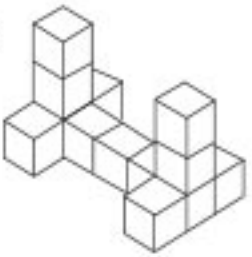
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Nacrtaj 3D oblik sa crteža 9 na izometrijskom papiru:

a) 

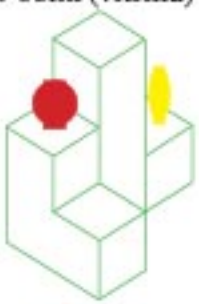
b) 

c) 

č) 

crtež 9

2. Na izometrijskom papiru nacrtaj 3D oblik (vitrina) sa crteža 10:



crtež 10

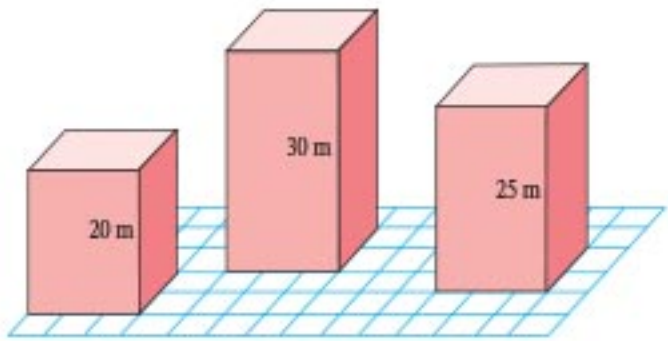
3. **Projektni zadatak**

Data je skica stambeno-poslovnog kompleksa koji se sastoji od tri zgrade smještene iznad tržnog centra koji se nalazi u prizemlju. Na prostoru oko zgrada planirano je hortikulturno uređenje i dječije igralište.

Svaki kvadratić na skici, na terenu je kvadrat sa stranicom od 5 m.

1) Prema skici na crtežu 11, nacrtaj crtež kompleksa na izometrijskom papiru, uzimajući u obzir da je 5 m na terenu predstavljeno jednom duži na izometrijskom papiru.

2) Napravi model kompleksa prema sljedećim uputstvima:
   - dužina jedne duži, koja je na terenu 5 m, na modelu će iznositi 5 cm,
   - prizemlje napravi od stiropora debljine 5 cm,
   - modele zgrada napravi od kartona.
   - nacrtaj vrata i prozore, vodeći računa o dimenzijama (svakih približno 3 m visine zgrade sadrži jedan sprat),
   - zalijepi zgrade na stiropor prema planu,
   - uredi prostor oko zgrada prema vlastitoj ideji.



crtež 11

17. KOMBINACIJE TRANSLACIJA, ROTACIJA I OSNIH SIMETRIJA

Aktivnost

U pravougaonom koordinatnom sistemu označi tačku A (2, 1).

a) Izvrši translaciju tačke A za 5 jedinica ulijevo i 3 jedinice nadolje. Označi njenu sliku sa A_1.

b) Pronađi sliku A_2 tačke A_1 pri osnoj simetriji sa osom $y = -2$.

c) Označite sa A_3 sliku tačke A_2 pri rotaciji sa centrom (0,1) i uglom od 90° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

Naš zadatak će biti da napravimo kombinacije dva kretanja (translacije, osne simetrije ili rotacije) i da pronađemo sliku datog originala, u odnosu na izabrani koordinatni sistem.

Primjer 1

Dat je trougao ABC sa tjemenima u tačkama A(1, 1), B(3, 1) i C(4, 3). Data je osna simetrija sa osom simetrije $y = 0$ i rotacija sa centrom u tački (0, 0) za ugao od 90°, u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

Andrej prvo primjenjuje osnu simetriju, a zatim rotaciju (crtež 1a), dok Admir prvo primjenjuje rotaciju, a zatim osnu simetriju (crtež 1b).

Da li su dobili istu sliku trougla ABC?

Дали тие добиле иста слика на триаголникот ABC?

Andrej redom dobija sljedeće trouglove:

$A(1, 1) \to D(1, -1) \to G(1, 1)$

$B(3, 1) \to E(3, -1) \to H(1, 3)$

$C(4, 3) \to F(4, -3) \to J(3, 4)$

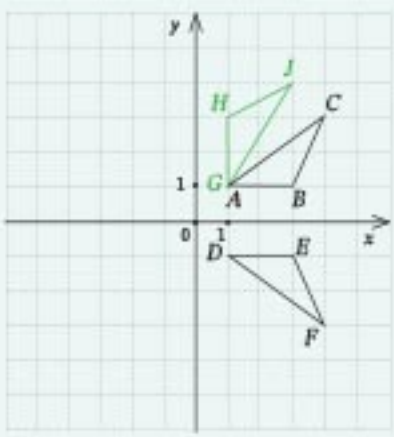
Admir redom dobija sljedeće trouglove:

$A(1, 1) \to K(-1, 1) \to N(-1, -1)$

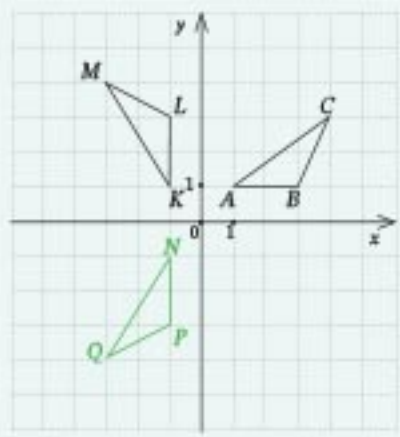
$B(3, 1) \to L(-1, 3) \to P(-1, -3)$

$C(4, 3) \to M(-3, 4) \to Q(-3, -4)$

Andrej i Admir nisu dobili istu sliku trougla ABC.



crtež 1a



crtež 1b

Zadatak 1

Dat je trougao ABC sa tjemenima A(−2, 3), B(1, 0) i C(3, 2).

a) Izvrši rotaciju trougla ABC oko tjemena B za 90° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

b) Zatim izvrši osnu simetriju dobijene slike trougla ABC u odnosu na pravu $y = x$.

c) Izvrši transformacije obrnutim redoslijedom.

Da li si dobio/la istu sliku trougla ABC?

Primjer 2

Dat je trougao ABC sa tjemenima u tačkama A(−2, 1), B(−2, 0) i C(0, 0).
Data je osna simetrija u odnosu na y-osu i translacija od 3 jedinice udesno i 1 jedinice prema gore. Arta prvo primjenjuje osnu simetriju, zatim translaciju (crtež 2a), dok Ana prvo primjenjuje translaciju, pa zatim osnu simetriju (crtež 2b).
Da li su dobile istu sliku trougla ABC?

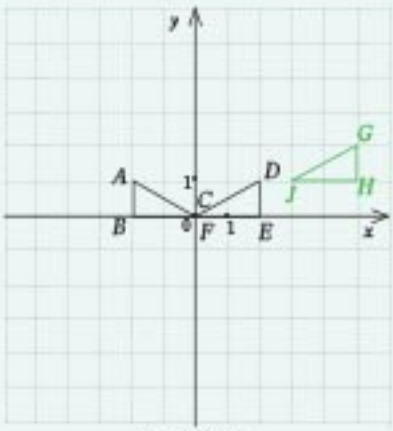
Arta redom dobija trouglove:

$A(-2, 1) \to D(2, 1) \to G(5, 2)$
$B(-2, 0) \to E(2, 0) \to H(5, 1)$
$C(0, 0) \to F(0, 0) \to J(3, 1)$

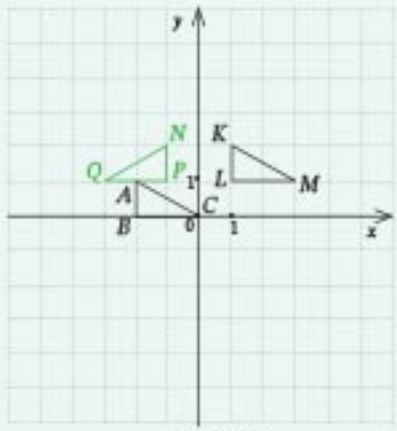
Ana redom dobija trouglove:

$A(-2, 1) \to K(1, 2) \to N(-1, 2)$
$B(-2, 0) \to L(1, 1) \to P(-1, 1)$
$C(0, 0) \to M(3, 1) \to Q(-3, 1)$

Arta i Ana nisu dobile istu sliku trougla ABC.



crtež 2a



crtež 2b

Zadatak 2

Nacrtaj trougao ABC sa tjemenima $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ i $C(2, 5)$.

a) Pronađi sliku trougla ABC sa osnom simetrijom oko x-ose.

b) Izvrši translaciju dobijene slike trougla ABC za 4 jedinice ulijevo i 5 jedinica prema gore.

c) Izvrši transformacije obrnutim redoslijedom.

Da li si dobio/la istu sliku trougla ABC?

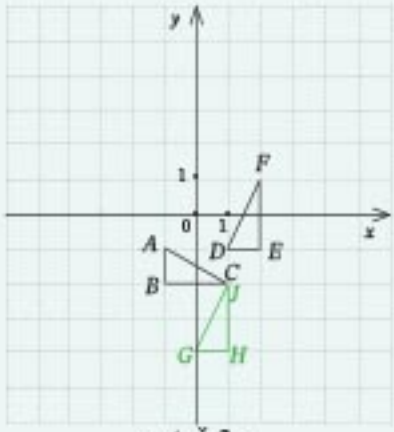
Primjer 3

Dat je trougao sa tjemenima u tačkama $A(-1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$.
Date su rotacija za ugao od 90° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu i centar u koordinatnom početku, i translacija od 1 jedinice ulijevo i 3 jedinice prema dolje,
Mila je prvo primijenila rotaciju, a zatim translaciju (crtež 3a) dok je Merlinda prvo primijenila translaciju, pa zatim rotaciju (crtež 3b).
Da li će one dobiti istu sliku trougla ABC?

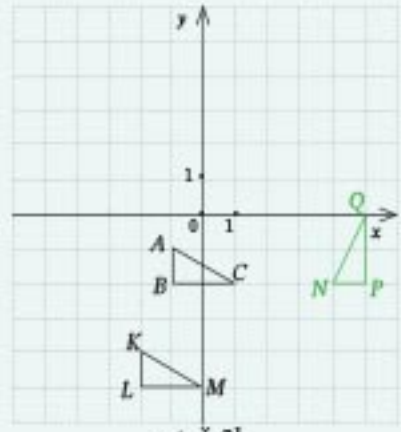
Mila redom dobija sljedeće trouglove:
$A(-1, -1) \to D(1, -1) \to G(0, -4)$
$B(-1, -2) \to E(2, -1) \to H(1, -4)$
$C(1, -2) \to F(2, 1) \to J(1, -2)$

Merlinda redom dobija sljedeće trouglove:
$A(-1, -1) \to K(-2, -4) \to N(4, -2)$
$B(-1, -2) \to L(-2, -5) \to P(5, -2)$
$C(1, -2) \to M(0, -5) \to Q(5, 0)$

Mila i Merlinda nisu dobile istu sliku trougla ABC.



crtež 3a



crtež 3b

Zadatak 3

U pravougaonom koordinatnom sistemu nacrtaj trougao ABC sa koordinatama tjemena $A(1, 0)$, $B(5, 1)$ i $C(1, 4)$.

a) Izvrši rotaciju oko tjemena A za 90° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.
b) Izvrši translaciju slike ulijevo za 2 jedinice i prema dolje za 5 jedinica.
c) Izvrši transformacije obrnutim redoslijedom. Da li si dobio/la istu sliku trougla ABC?

Aktivnost

Dat je trougao sa tjemenima u tačkama $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(3, 3)$.
Data je rotacija za 180° oko koordinatnog početka i osna simetrija u odnosu na x-osu.
Da li je redoslijed izvršavanja transformacija važan?

Zadatak 4

Dat je pravougaonik sa tjemenima u tačkama $P(2, 1)$, $Q(6, 1)$, $R(6, 4)$ i $S(2, 4)$. Izvršene su dvije uzastopne transformacije: rotacija za 180° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko koordinatnog početka i osna simetrija u odnosu na osu.

a) Nađi koordinate tačaka P, Q i R nakon rotacije. Označi ih sa P_1, Q_1 i R_1.

b) Nađi koordinate tačaka P_1, Q_1 i R_1 nakon osne simetrije. Označi ih sa P_2, Q_2 i R_2.

c) Objasni da li ćeš dobiti iste tačke ako se promijeni redoslijed dvije transformacije.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Na datom obliku crteža 4 izvrši sljedeće transformacije:

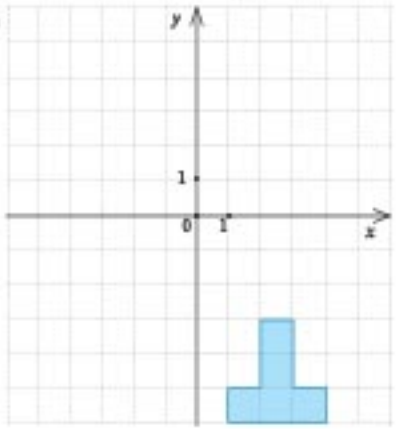
a) osna simetrija u odnosu na x-osu, zatim translacija za 3 ulijevo i za 4 nagore,

b) rotacija za 180° sa centrom u (−1,0), zatim osna simetrija u odnosu na pravu $y = 1$,

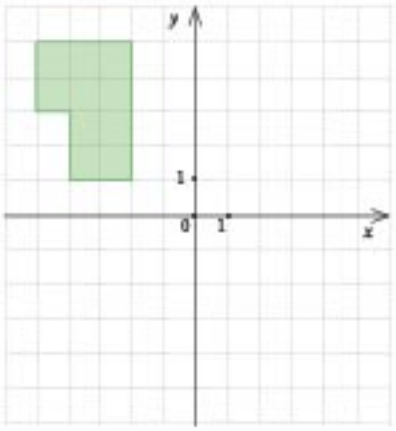
c) osna simetrija u odnosu na pravu $y = -1$, zatim rotacija za 90° sa centrom $(0, -3)$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu,

č) translacija za 3 ulijevo i 5 nadolje, zatim osna simetrija u odnosu na pravu $x = -1$.

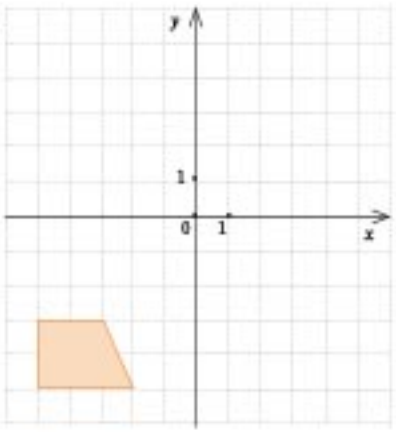
a)



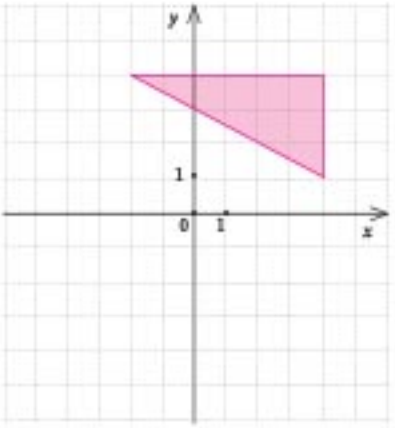
b)



c)



č)



crtež 4

2. U pravougaonom koordinatnom sistemu nacrtaj trougao ABC sa koordinatama tjemena $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ i $C(2, 5)$.

a) Pronađi sliku trougla ABC pri osnoj simetriji u odnosu na x-osu i označi je sa MNP.

b) Izvrši translaciju trougla MNP za 4 jedinice ulijevo i 5 jedinica nagore.

c) Izvrši transformacije obrnutim redoslijedom: prvo izvrši translaciju trougla ABC za 4 jedinice ulijevo i 5 jedinica prema gore, a zatim osnu simetriju dobijenog trougla u odnosu na x-osu. Da li si dobio/la istu sliku? Šta zaključuješ?

3. U pravougaonom koordinatnom sistemu, nacrtaj četverougao $ABCD$ sa koordinatama tjemena $A(1, -3)$, $B(3, -2)$, $C(4, 0)$ i $D(3,1)$.
   a) Odredi sliku četverougla $ABCD$ pri osnoj simetriji u odnosu na pravu $y = 1$ i označi je sa $MNPR$.
   b) Izvrši rotaciju četverougla $MNPR$ sa centrom u tački $(0, -1)$ za ugao od $90°$ u smjeru kazaljke na satu.
   c) Izvrši transformacije obrnutim redoslijedom: prvo datu rotaciju $ABCD$, a zatim osnu simetriju dobijenog četverougla u odnosu na pravu $y = 1$. Da li si dobio/la istu sliku? Šta zaključuješ?

4. U sportskoj dvorani postavljaju se novi LED reflektori. Tehničar je prvo označio mjesta predviđena za tri reflektora na planu dvorane tačkama $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ i $C(4, 5)$. Zatim mu je šef rekao da plan treba prilagoditi za drugi zid dvorane. Da bi se reflektori pomjerili u novi položaj, potrebno je izvršiti dva kretanja: osnu simetriju u odnosu na x-osu i translaciju za 3 jedinice ulijevo i 1 jedinicu prema dolje.
   a) Nađi koordinate tačaka A, B i C nakon svake od dvije transformacije.
   b) Provjeri da li ćeš dobiti isti rezultat ako prvo izvršiš translaciju, a zatim simetriju?

5. Dat je trougao sa tjemenima u tačkama $A(1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$. Date su dvije translacije: T_1 koja se pomjera 3 jedinice udesno i 4 jedinice prema gore, i T_2 koja se pomjera 1 jedinicu udesno i 3 jedinice prema dolje. Da li je redoslijed izvršavanja transformacija važan?

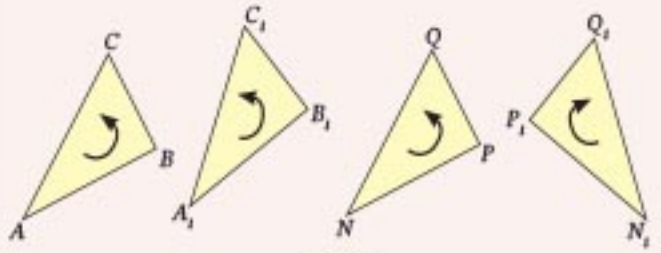
Istraživanje

Nacrtaj dvije duži AB i CD, koje imaju istu dužinu i nisu paralelne. Pritom su A i C, kao i B i D, različite tačke. Pronađi rotaciju (ugao i centar) kojom su tačke C i D slike tačaka A i B, odgovarajuće.
Uputstvo: Centar rotacije jednako je udaljen od tačaka A i C, tako da će ležati na simetrali duži AC. Iz istog razloga, centar rotacije će također ležati na simetrali duži BD.

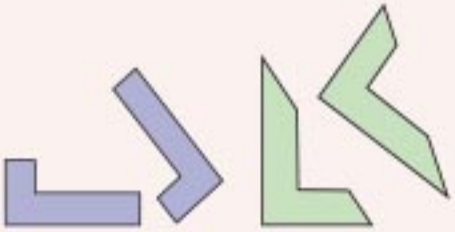
18. IDENTIFIKOVANJE KOMBINACIJA OSNE SIMETRIJE, ROTACIJE I TRANSLACIJE

Aktivnost

a) Za trouglove na crtežu važi $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ i $\Delta NPQ \cong \Delta N_1P_1Q_1$. Koji par trouglova je u istom smjeru, a koji su u suprotnom smjeru? Kako si zaključio/la? Objasni svoj odgovor.



crtež 1



crtež 2

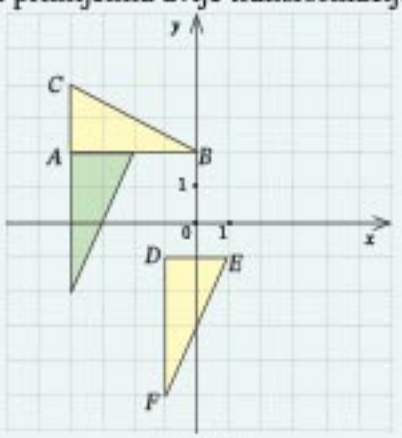
b) Dvodimenzionalni oblici na crtežu 2 podudarni su u parovima. Koji par dvodimenzionalnih oblika je u istom smjeru, a koji u suprotnom smjeru? Kako si zaključio/la? Objasni svoj odgovor.

U ovoj lekciji pokušaćemo da identifikujemo kombinacije osne simetrije, rotacije i translacije koje se koriste za promjenu položaja datog 2D oblika.

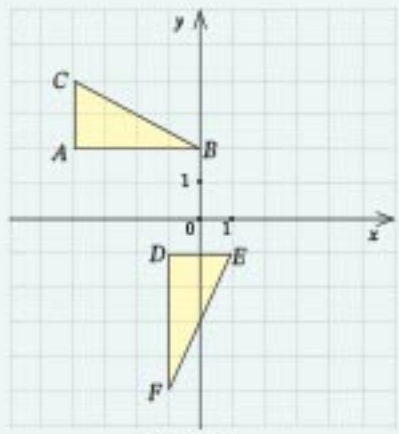
Primjer 1

Marija i Martin traže kombinaciju translacija, rotacija i osnih simetrija kojom će se od originalnog trougla ABC sa tjemenima $A(-4, 2)$, $B(0, 2)$ i $C(-4, 4)$ dobiti slika trougla DEF sa tjemenima $D(-1, -1)$, $E(1, -1)$ i $F(-1, -5)$.

Oboje su primijetili da su oba trougla u istom smjeru. To znači da ne bi trebalo da postoji osna simetrija u kombinaciji.
Marija je primijenila rotaciju sa centrom u tački $(-4, 2)$ i ugao od $90°$ u smjeru kazaljke na satu, a zatim je primijenila translaciju od 3 jedinice udesno i 3 jedinice prema dolje (crtež 3a).
Marija je primijenila dvije transformacije.



crtež 3a

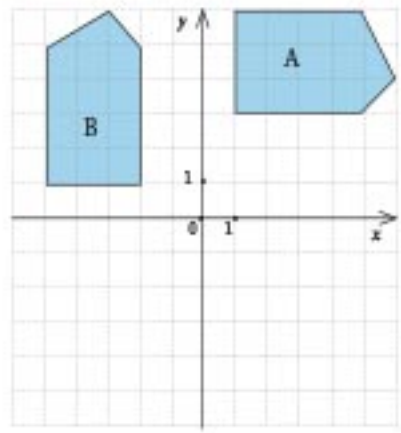


crtež 3b

Martin je primijetio da će, ako primijeni rotaciju sa centrom u tački $(-4, -1)$ i uglom od $90°$ u smjeru kazaljke na satu, odmah dobiti trougao DEF kao što je prikazano na crtežu 3b. Martin je primijenio jednu transformaciju.
Znači, Marija je primijenila dvije transformacije, a Martin jednu.
Njegov metod je jednostavniji.

Zadatak 1

Pronađi kombinaciju transformacija kojom se od originala A dobija slika B (crtež 4).

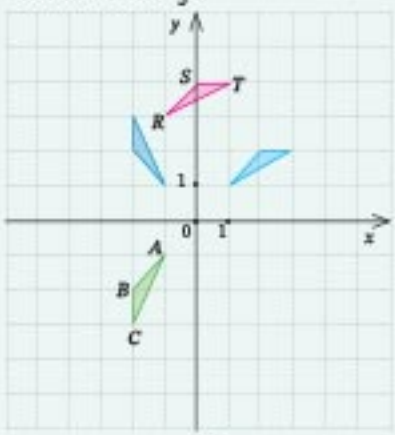


crtež 4

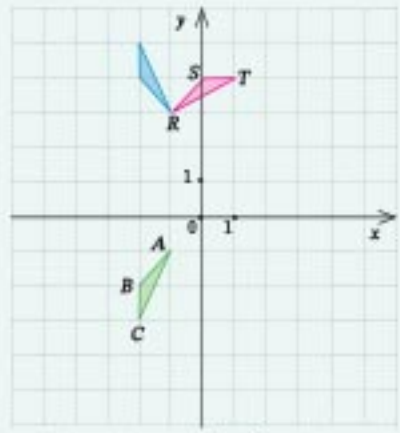
Primjer 2

Nastavnik je zadao Pavlu, Stefaniji i Petru zadatak da pronađu kombinaciju translacija, rotacija i osnih simetrija kojom se originalni – trougao ABC sa tjemenima $A(-1, -1)$, $B(-2, -2)$ i $C(-2, -3)$ transformiše u sliku – trougao RST sa tjemenima $R(-1,3)$, $S(0,4)$ i $T(1,4)$.

Pavle, Stefanija i Petar dali su sljedeća rješenja. Njih troje su primijetili da su dva trougla suprotno usmjerena. To znači da je osna simetrija neophodna u kombinaciji. Pavle je prvo primijenio osnu simetriju u odnosu na x-osu (crtež 5a), zatim je primijenio rotaciju sa centrom u koordinatnom početku za ugao od $90°$ u smjeru kretanja kazaljke na satu i na kraju je primijenio translaciju za 2 jedinice ulijevo i 2 jedinice prema gore. Primijenio je tri transformacije.



crtež 5a



crtež 5b



crtež 5c

Stefanija je prvo primijenila osnu simetriju u odnosu na pravu $y = 1$ (crtež 5b).

Zatim je primijetila da će, ako primijeni rotaciju sa centrom u tački R i uglom od 90° u smjeru kretanja kazaljke na satu, odmah dobiti trougao RST kao sliku. Stefanija je primijenila dvije transformacije.

Petar je prvo primijenio osnu simetriju u odnosu na pravu $y = x$ (crtež 5c). Zatim je primijetio da će, ako primijeni rotaciju sa centrom u tački $(-1, 1)$ i uglom od 180°, odmah dobiti trougao RST kao sliku. Petar je primijenio dvije transformacije.

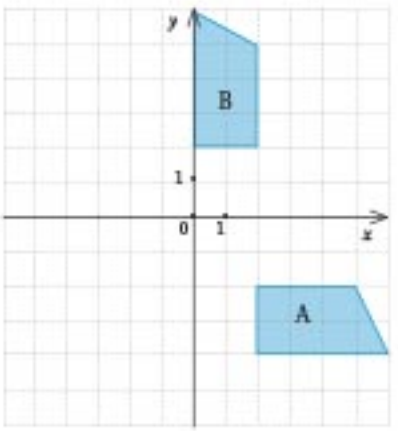
Znači, Pavle je primijenio tri transformacije, a Stefanija i Petar primijenili su po dvije. Kombinacija koju su identifikovali Stefanija i Petar jednostavnija je od Pavlove kombinacije.

Zadatak 2

Riješi zadatak iz prethodnog primjera, razmatrajući svoju četvrtu varijantu. Uporedi svoj broj transformacija sa brojem transformacija Pavla, Stefanije i Petra.

Zadatak 3

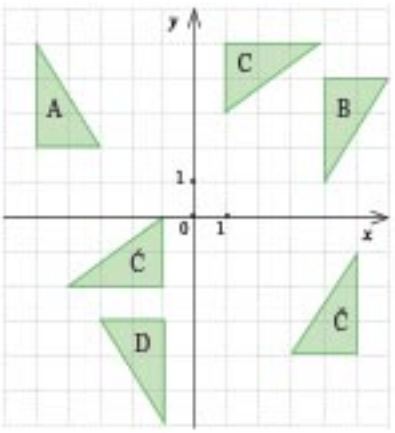
Pronađi kombinaciju transformacija kojom se od originala – četverougla A, dobija slika – četverougao B (crtež 6).



crtež 6

ZADACI ZA VJEŽBANJE

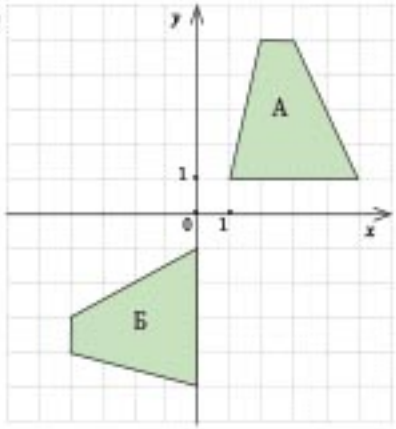
1. Pronađi kombinacije mogućih translacija, rotacija i osnih simetrija tako da original ima koordinate $A(3,2)$, $B(4,2)$, $C(5,1)$, a slika ima koordinate $M(3,4)$, $N(3,5)$, $P(4,6)$.
2. Data su dva kvadrata $ABCD$ i $MNPQ$ sa tjemenima u tačkama $A(3,2)$, $B(3,3)$, $C(4,3)$, $D(4,2)$ i $M(5,0)$, $N(4,0)$, $P(4,1)$, $Q(5,1)$. Pronađi kombinaciju od najviše tri transformacije (translacije, rotacije i osne simetrije) za koje je $ABCD$ original, a $MNPQ$ njegova slika.
3. Pronađi kombinaciju mogućih translacija, rotacija i osnih simetrija koja transformiše figuru:
   a) A u B, b) Ć u A, c) D u C,
   č) Ć u Č, ć) B u D (crtež 7).



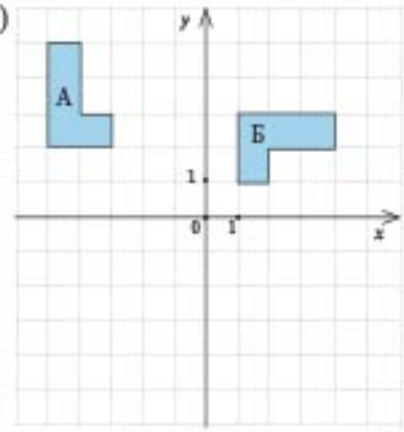
crtež 7

4. Pronađi kombinaciju mogućih translacija, rotacija i osnih simetrija kojom se figura A transformiše u figuru B (crtež 8):

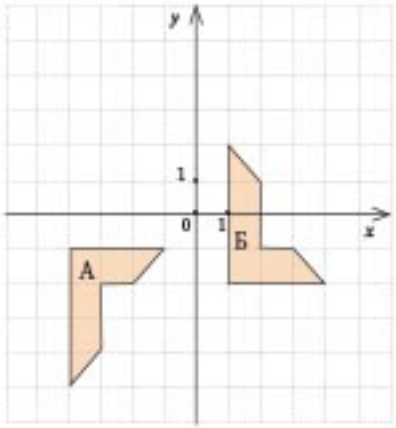
a)



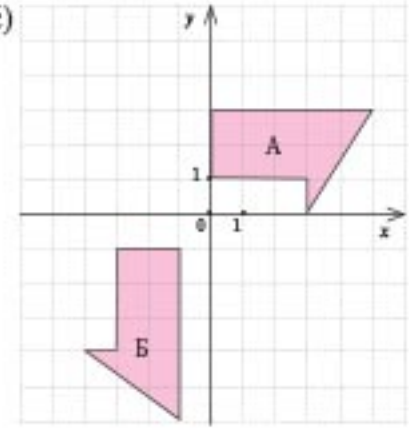
b)



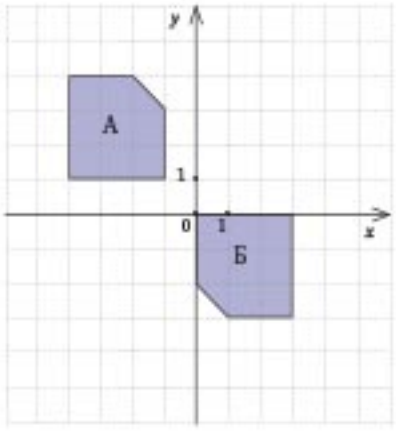
c)



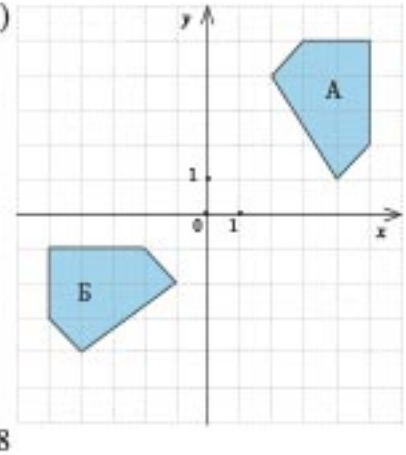
č)



ć)



d)



crtež 8

Istraživanje

Ivan bi htio da provjeri da li se proizvoljno kretanje slike, određeno originalnim ABC i njegovom slikom $A_1B_1C_1$, može predstaviti kao kombinacija od najviše tri osne simetrije. On razmišlja na sljedeći način: Sa prvom osnom simetrijom, tačka A poklopiće se sa tačkom A_1. Zatim, sa sljedećom osnom simetrijom (ako je potrebno) druga tačka (B) poklopiće se sa tačkom B_1, pritom će tačka A_1 ostati na mjestu. Na kraju, ako bude potrebna treća osna simetrija, treća tačka (C) poklopiće se sa tačkom C_1, a tačke A_1 i B_1 ostaće na mjestu. Izaberi dva podudarna trougla i provjeri da li je Ivan u pravu.

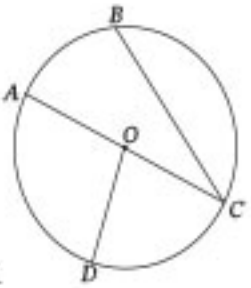
ZADACI ZA PONAVLJANJE I UTVRĐIVANJE

1. Jedan od dva ugla sa paralelnim stranicama je 67°. Koliko stepeni ima drugi ugao ako:
   a) su njihove stranice u istom smjeru,
   b) su njihove stranice u suprotnim smjerovima,
   c) je jedan par stranica u istom smjeru, a drugi par je u suprotnim smjerovima?

2. Nađi uglove α i β sa međusobno normalnim kracima, ako:
   a) $\alpha = 118° + \beta$, b) $\alpha = 5\beta$.

3. Prema crtežu 1, navedi sve:
   a) kružne isječke, b) kružne odsječke.

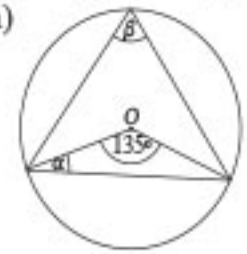
4. Nađi periferijski ugao koji je iznad istog kružnog luka sa centralnim uglom od: a) 79°, b) 234°.



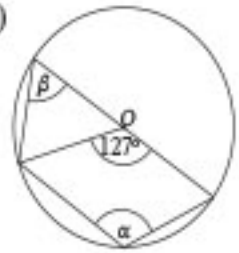
crtež 1

5. Nađi nepoznate uglove α i β na crtežu 2:

a)



b)



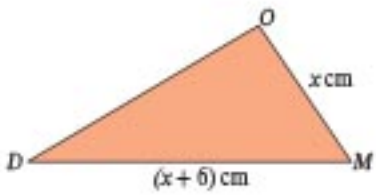
crtež 2

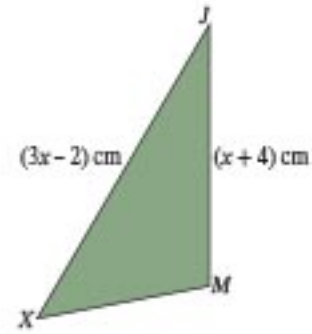
6. Konstruiši pravougli trougao ABC, ako je data hipotenuza $c = 4{,}8$ cm i ugao $\alpha = 30°$.

7. Konstruiši jednakokraki trougao ABC, ako je data dužina katete $b = 5{,}4$ cm i ugao kod osnovice $\alpha = 65°$.

8. Konstruiši jednakostranični trougao ABC, ako je dato rastojanje od centra težišta do jedne stranice trougla 1,5 cm.

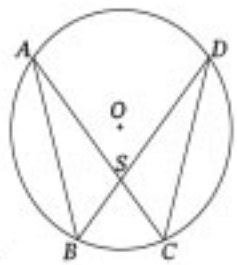
9. Poznato je da je $\Delta DMO \cong \Delta JXM$. Prema podacima na crtežu 3, izračunaj dužinu svake od stranica trouglova.





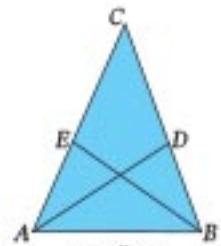
crtež 3

10. Ako je dato da $\overline{AB} = \overline{CD}$, objasni zašto $\Delta ABS \cong \Delta DCS$ (crtež 4).



crtež 4

11. Duži AD i BE leže na simetrali uglova u osnovici jednakokrakog trougla ABC (crtež 5).
Objasni zašto:
a) $\Delta ABD \cong \Delta BAE$, b) $\overline{DC} = \overline{EC}$.

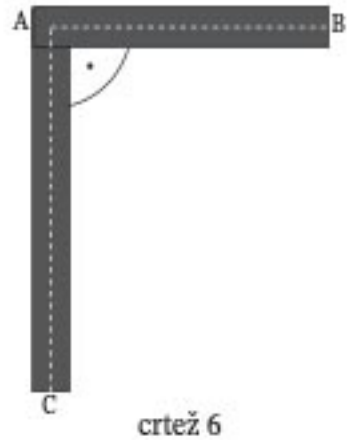


crtež 5

12. Izračunaj hipotenuzu pravouglog trougla, ako su mu katete:
a) $a = 9$ cm i $b = 12$ cm, b) $a = 7$ cm i $b = 24$ cm.

13. Izračunaj jednu katetu pravouglog trougla, ako hipotenuza i druga kateta imaju dužine:
a) $c = 25$ cm i $b = 15$ cm, b) $c = 37$ cm i $a = 35$ cm.

14. Tri raskrsnice A, B i C povezane su na takav način da od A do B postoji pravi put dužine 230 m. Od A do C postoji pravi put dužine 325 m, a ugao BAC je prav (crtež 6). Za koliko metara će se skratiti putovanje od B do C ako se između ove dvije raskrsnice izgradi direktan put?



crtež 6

15. U oblasti pravog ugla nalazi se tačka M, koja je udaljena 2,4 cm i 0,7 cm od njegovih krakova. Izračunaj koliko je tačka M udaljena od tjemena pravog ugla.

16. Grad B nalazi se 56 km istočno od grada A. Grad C nalazi se 73 km južno od grada A. Pronađi rastojanje između gradova B i C.

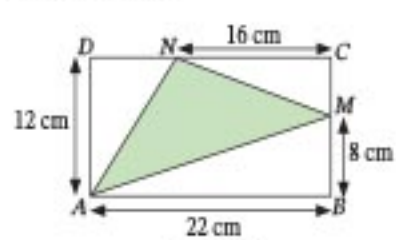
17. Osnovice jednakokrakog trapeza su $a = 85$ cm i $b = 43$ cm, a njegov krak ima dužinu 35 cm. Izračunaj visinu trapeza.

18. Izračunaj dijagonalu d_2 romba, ako su stranica i jedna dijagonala:
a) $a = 55$ cm i $d_1 = 66$ cm, b) $a = 45$ cm i $d_1 = 72$ cm.

19. Odredi poluprečnik opisane kružnice oko kvadrata sa stranicom $a = 3$ cm.

20. Izračunaj obim trougla AMN, koji je upisan u pravougaonik $ABCD$ (crtež 7).

21. Konstruiši pravougaonik sa dijagonalom $d = 6$ cm i uglom između dijagonala 140°.



crtež 7

22. Konstruiši paralelogram sa dijagonalom $d_1 = 7$ cm, stranicom $a = 5$ cm i uglom između njih 30°.

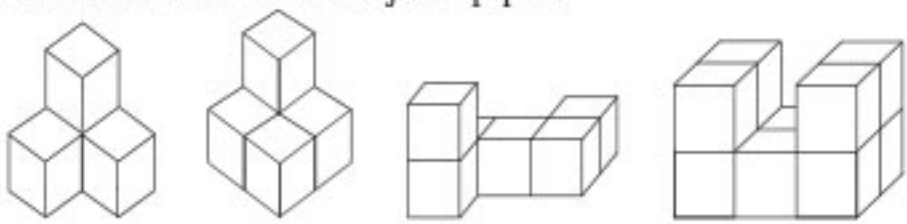
23. Nađi krak jednakokrakog trapeza, ako su mu osnovice 38 cm i 24 cm, a visina sa krakom zaklapa ugao od 45°.

24. Srednja linija trapeza je 10,5 cm, a jedna osnovica je 7,2 cm. Izračunaj drugu osnovicu.

25. Jedan od unutrašnjih uglova deltoida je 47°, a zbir jednakih uglova je 236°. Izračunaj uglove deltoida.

26. Koliko osnovnih ivica i koliko bočnih ivica ima:
a) devetnaestougaona prizma, b) sedamnaestougaona piramida?

27. Nacrtaj 3D oblik sa crteža 8 na izometrijskom papiru.



crtež 8

28. Dat je trougao ABC sa tjemenima $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ i $C(3, 4)$.

a) Pronađi sliku trougla ABC pri osnoj simetriji u odnosu na x-osu i označi je sa MNP.

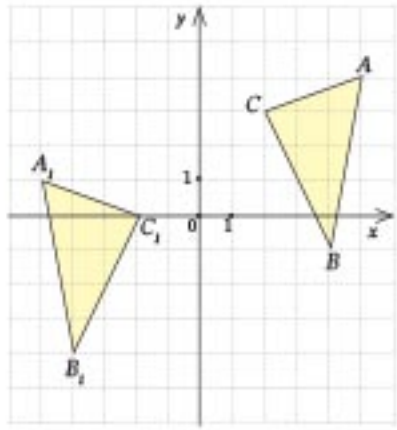
b) Izvrši translaciju trougla MNP za 5 jedinica ulijevo i 3 jedinice prema gore.

c) Izvrši transformacije obrnutim redoslijedom. Da li si dobio istu sliku? Šta zaključuješ?

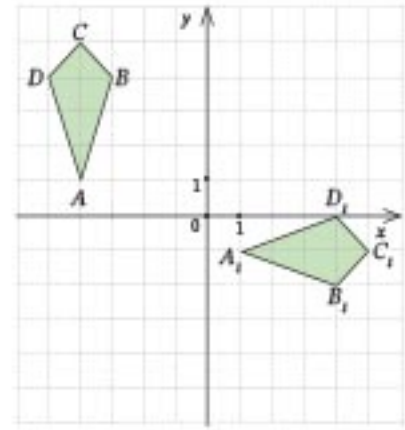
29. Opiši transformaciju kojom se:

a) originalni – trougao $ABCS$ – transformiše u sliku – trougao $A_1B_1C_1$ (crtež 9a),

b) originalni – četverougao $ABCD$ – transformiše u sliku – četverougao $A_1B_1C_1D_1$ (crtež 9b).



crtež 9a



crtež 9b



Tema 3:

ALGEBRA

Rezultati učenja:

Proučavajući ovu temu, moći ćeš da:

- rješavaš probleme sa cjelobrojnim racionalnim izrazima.
- koristiš termine relacija i funkcija u svakodnevnim kontekstima.
- rješavaš probleme tumačenjem grafika linearne funkcije.

1.Monom

Monom. Monom u normalnom obliku

Aktivnost

a) Šta je konstanta, a šta promjenljiva? Šta je izraz?
b) Nađi konstante i promjenljive u sljedećim izrazima: $3x^2, xy^3, -4a^3b^2, y$.

Izraz formiran konstantama i promjenljivim povezanim sa znacima operacija množenja i stepenovanja sa nenegativnim cijelim brojem naziva se **monom**.

Konstante ćemo smatrati racionalnim brojevima, a promjenljive vrijednostima u skupu racionalnih brojeva.

Primjer 1

a) Sve konstante su monomi.
b) Izrazi, na primjer, $-x, y, \frac{4}{7}a^2b, 3x^2, xy^3, -4a^3b^2$ su monomi.
c) Izrazi, na primjer, $x^2+1, \frac{2}{y}, \frac{3x-2}{5}$ nisu monomi, jer sadrže barem po jednu operaciju sabiranja, oduzimanja i dijeljenja sa promjenljivom.
č) Izraz $\frac{y^2}{15}$ je monom, jer ga možemo napisati kao proizvod $\frac{1}{15}y^2$.

Zadatak 1

Koji od sljedećih izraza su monomi:

a) $\frac{5}{6}$, b) $8x$, c) $3x+2$, č) $\frac{x}{5}$, ć) $\frac{5}{x}$, d) $\frac{2x+1}{3}$, dž) $-7xy^3z^5$, đ) $\frac{2x^4y^2z}{5}$?

Primjer 2

Monom $5x^3y2zy$ ima tri promjenljive x, y i z. Primjenom komutativnog zakona množenja i postupka množenja stepena sa istom osnovom, možemo zapisati proizvod yy u obliku y2. Slično, proizvodu $5 \cdot 2 = 10$. Tada je monom $5x^3y2zy$ jednak monomu $10x^3y^2z$. Monom $10x^3y^2z$ ne može se zapisati sa manjim brojem množilaca nijednim daljim postupkom.
Kažemo da je monom zapisan u **normalnom obliku**. Dakle:

$5x^3y2zy = 10x^3y^2z$.

Pri svođenju monoma na **normalan oblik**:
- razmještamo množioce primjenom komutativnog zakona;
- množimo konstante i zapisujemo množioce koji označavaju istu promjenljivu u obliku stepena koristeći pravilo za množenje stepena sa istom osnovom;
- dobijeni monom je jednak datom monomu.

Dogovorili smo se da za monome u normalnom obliku prvo zapišemo množilac koji je konstanta, a zatim množioce koji su promjenljive.

Primjer 3

Svedi monom u normalan oblik: zadaci a) $5x^5yxy^2$, b) $2x^3yx^4y(-4xy)$, c) $-xyx^3y^3xy$.

a) $5x^5yxy^2 = 5x^6y^3$, b) $2x^3yx^4y(-4xy) = -8x^8y^3$, c) $-xyx^3y^3xy = -x^5y^5$.

Zadatak 2

Svedi monom u normalan oblik:
a) $8ab^23ab$, b) x^2yxxy^2, c) $-x^2y^34x^3y^3(-6xy)$, č) $2aab3abb4ab^2$.

Konstanta u monomu u normalnom obliku kojom se množe promjenljive naziva se **koeficijent monoma**. Proizvod promjenljivih u monomu naziva se glavna **vrijednost monoma**.

Primjer 4

Nađi koeficijent i glavnu vrijednost monoma:
a) $6ab^3c^2$, b) $-xy^3$, c) xy^2z^3, č) $-\frac{3x^2y}{4}$.

a) Monom $6ab^3c^2$ ima koeficijent 6 i glavnu vrijednost ab^3c^2.
b) Pošto je $-xy^3 = (-1) \cdot xy^3$, koeficijent monoma je -1, dok je glavna vrijednost xy^3.
c) Pošto je zadatak, koeficijent monoma je 1, dok je glavna vrijednost xy^2z^3.
č) Kod monoma $-\frac{3x^2y}{4}$, koeficijent je, $-\frac{3}{4}$, a glavna vrijednost je x^2y.

Zadatak 3

Nacrtaj i popuni tabelu:

monom	$2{,}5\,a^5b^2$	y^3	$-xyz$	$\frac{x^3y^5}{3}$	$-12x^2$	y^3
koeficijent						
glavna vrijednost						

Stepen monoma

Aktivnost

Koji je stepeni pokazatelj promjenljive u monomu: a) $5a$, b) $\frac{1}{3}x^2$?

Kod monoma sa jednom promjenljivom, izložilac stepena promjenljive je stepen monoma.
Na primjer, monom $-2x^3$ je trećeg stepena, a monom $7a^4$ je četvrtog stepena, itd.
Kod monoma sa dvije ili više promjenljivih, pored **stepena monoma u odnosu na svaku promjenljivu** posebno, razlikujemo i stepen monoma u odnosu na sve promjenljive.
U tom smislu, kod monoma $-3xy^2$ promjenljiva x je prvog stepena, a promjenljiva y je drugog stepena, pa je stepen monoma u odnosu na sve promjenljive $1 + 2 = 3$.

Zbir izložilaca promjenljivih u monomu naziva se **stepen monoma**.

Primjer 5

Nađi stepen monoma: a) $2a^2b^3c^4$, b) $5xy^2z$, c) $-xyz$.

a) Zbir izložilaca promjenljivih je $2 + 3 + 4 = 9$, pa monom ima stepen 9.
b) Stepen monoma $5xy^2z$ je $1 + 2 + 1 = 4$.
v) Svaka od promjenljivih x, y i z je prvog stepena, pa je monom $-xyz$ trećeg stepena.

Zadatak 4

Nađi stepen monoma:
a) $2xy^3z^2$, b) $5x4y$, c) x^3z^5, č) $3x^3z^3$.

Slični monomi

Aktivnost

Koji od monoma: $-3xy^2$, $3x^2$, $5xy^2$, $-3x$ i $5x^2y^2$ imaju istu glavnu vrijednost?

Primjer 6

Svedi monome $3(-2)x^4yy^2$ i $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2$ na normalan oblik.
Da li imaju istu glavnu vrijednost?

Svedi monome na normalan oblik: $3(-2)x^4yy^2 = -6x^4y^3$ i $(5^2 - 2^2)xyx^3y^2 = 21x^4y^3$.
Monomi $-6x^4y^3$ i $21x^4y^3$ imaju istu glavnu vrijednost. Razlikuju se samo po koeficijentu.
Za njih kažemo da su slični monomi.

Monomi koji imaju istu glavnu vrijednost nazivaju se **slični monomi**.

Zadatak 5

Koji od sljedećih parova monoma su slični:
a) $-2x$ i $2x^2$, b) $4xy$ i $-3xy$, č) -5 i 5, ć) $7a^4b^3aba$ i ab^3a^5?

Спротивни мономи

Aktivnost

Dati su monomi $-2x^2$ i $2x^2$.
a) Da li su slični? b) Koji su brojevi njihovi koeficijenti?

Primjer 7

Monomi $-6x^5y$ i $6x^5y$ imaju istu glavnu vrijednost. To su slični monomi. Njihovi koeficijenti -6 i 6 su suprotni brojevi. Kažemo da su monomi jedan drugom suprotni.

Dva slična monoma sa suprotnim koeficijentima nazivaju se **suprotni monomi.**

Primjer 8

Nađi suprotne monome monoma:
a) $-4xy^3$, b) $-6a^4b^6$, c) $7{,}5x^2y^3$, č) $-\frac{2}{3}x^9y^7z$.

a) Спротивен моном на мономот $-4xy^3$ е мономот $4xy^3$, b) $6a^4b^6$, c) $-7{,}5x^2y^3$, č) $\frac{2}{3}x^9y^7z$.

Zadatak 6

Nađi suprotne monome monoma: a) $-4xy^3$, b) xy, c) -6, č) $7{,}5x^2y^3$.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koji od sljedećih izraza su monomi:
   a) 10, b) $2x$, c) $5x+1$, č) $\frac{x^2}{2}$, ć) $\frac{1}{x^3}$, d) $\frac{x-1}{4}$, dž) $-3xy^3z^4xy^2$, đ) $\frac{x^4y^2z}{7x^2y}$?
2. Svedite monom u normalan oblik:
   a) x^5y^3xy, b) $3ab(-2a^3b)$, c) $-5xy^2x^2y^3(-6xy)$, č) $ab2abb4a^2$.
3. Prepiši i dopuni tabelu:

monom	$3ab$	$-5x^3y^3$	$x^5y^2z^4$	$\frac{x^3y^4}{9}$	$\frac{-x}{8}$	$-xy^5$
koeficijent						
glavna vrijednost						
stepen monoma						

4. Koji od sljedećih parova monoma su slični:
a) $3x$ i $3x^2$, b) $5x^2y$ i $-3x^2y$, c) 1 i 5, č) a^3b i ab^3?

5. Napiši dva monoma slična monomu: a) $4x^4$, b) $5xy$, c) 7, č) a^2b^3.

6. Nađi suprotni monom monomu: a) $-x^3$, b) $6x^2y^4$, c) $-3{,}7$, č) $15y^3$.

7. Nađi stepen monoma: a) a^3b, b) $4x^3y^3z$.

8. Zapiši: a) tri slična sa stepenom 7, b) dva suprotna monoma sa stepenom 5.

9. a) Napiši izraz za broj flomastera kupljenih za 4 knjižare, ako je za svaku kupljeno x kutija sa x pakovanja, a svako pakovanje sadrži y flomastera.
b) Dobijeni izraz svedi u normalan oblik.

10. Pčelar ima 3 pčelinjaka sa x sanduka pčela. U svakom sanduku se nalazi y ramova, a na svakom ramu y3 pčela.
a) Napiši izraz za ukupan broj pčela koje pčelar ima.
b) Dobijeni izraz svedi u normalan oblik.
c) Odredi koeficijent i glavnu vrijednost monoma.

Istraživanje

1. Definisali smo konstante i promjenljive u slučaju kada imamo brojni izraz. Pokuš

aj da odgovoriš na pitanje: Šta će biti konstante, a šta promjenljive u geometriji? HAIĮPTAJ trougao ABC, pravu a i tačku M. Oblici koje si nacrtao su konstante. Na primjer, tačka M je konstanta, jer je tačno određena u ravni. NAPIŠI: trougao XYZ, prava c, tačka S. Da li su ovi oblici, a da nisu dati u ravni, promjenljivi? Zašto?

2. a) Koji izraz koristimo za izračunavanje obima jednakostraničnog trougla? Da li je taj izraz monom? Koji je koeficijent, a koja je glavna vrijednost monoma?
b) Navedi primjere monoma koje koristimo u mjerenju i geometriji, a koji imaju viši stepen od onog datog u primjeru. Šta računamo sa njima?

2. SABIRANJE I ODUZIMANJE MONOMA

Sabiranje monoma

Aktivnost

Učenici sprovode eksperiment sa rastom biljaka. Rast biljke u prvoj sedmici opisan je izrazom $3x$, a u drugoj sedmici izrazom $5x$.
Napiši izraz koji pokazuje koliko je biljka porasla za dvije sedmice.

Podsjetimo se da se slični monomi u algebarskom zbiru smanjuju sabiranjem njihovih koeficijenata, dok promjenljive ostaju iste. Na primjer, imamo da je

$$7x + 5x = (7 + 5)x = 12x.$$

Zbir dva slična monoma je monom čiji je koeficijent jednak zbiru koeficijenata sabiraka, a glavna vrijednost je jednaka glavnoj vrijednosti sabiraka.

Primjer 1

Nađi zbir sličnih monoma: a) $5y^3$ i y^3, b) $2x^4y$ i $-2x^4y$,

a) $5y^3 + y^3 = (5 + 1)y^3 = 6y^3$ b) $2x^4y + (-2x^4y) = (2 + (-2))x^4y = 0 \cdot x^4y = 0$

Uoči da je zbir dva suprotna monoma jednak nuli.
Komutativni i asocijativni zakoni važe za sabiranje sličnih monoma. Zato možemo sabirati monome bilo kojim redoslijedom i grupisati monome na bilo koji način.
To isto tako, znači da možemo govoriti o zbiru nekoliko sličnih monoma.

Primjer 2

Izračunaj sabiranje sličnih monoma: a) $3x^3yz^4$, x^3yz^4 i $7x^3yz^4$, b) $\frac{1}{2}ab$, $2\frac{1}{2}ab$ i $7ab$.

a) $3x^3yz^4 + x^3yz^4 + 7x^3yz^4 = (3 + 1 + 7)x^3yz^4 = 11x^3yz^4$,

b) $\frac{1}{2}ab + 2\frac{1}{2}ab + 7ab = \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 7\right)ab = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{14}{2}\right)ab = 10ab$.

Zadatak 1

Nađi zbir sličnih monoma: a) $2x^3$ i $3x^3$, b) $3x^2y$ i $-5x^2y$, c) $-xy^3z^4$, $7xy^3z^4$, i $0{,}5\,xy^3z^4$.

Primjer 3

Cijena olovke je x^2 denara, a cijena gumice je dvostruko veća. Marina je kupila 5 olovaka i gumicu.
a) Napiši izraz koji predstavlja ukupnu cijenu gumice i olovaka.
b) Skrati dobijeni izraz.

a) Cijena 5 olovaka je $5x^2$, a cijena gumice je $2x^2$, pa je izraz za ukupnu cijenu $5x^2 + 2x^2$.
b) Dobijeni izraz je zbir dva slična monoma, pa imamo $5x^2 + 2x^2 = (5 + 2)x^2 = 7x^2$.

Primjer 4

Nađi zbir monoma $5x^2$ i $3y$.

Monomi $5x^2$ i $3y$ nisu slični, pa ćemo njihov zbir napisati kao algebarski zbir $5x^2 + 3y$.

Primjer 5

Nađi zbir monoma:

a) $5a^2b$, $-3ab^2$, $-a^2b^2$, $4ab$, $6a$ i $2b$, b) $3a^2$, $5a^2b$, $-a^2b$, b, $-3b$ i 4.

a) Zbir datih monoma zapisujemo kao algebarski zbir

$5a^2b + (-3ab^2) + (-a^2b^2) + 4ab + 6a + 2b =$

$= 5a^2b - 3ab^2 - a^2b^2 + 4ab + 6a + 2b.$

b) $3a^2 + 5a^2b + (-a^2b) + b + (-3b) + 4 =$ Traženi zbir zapisujemo kao algebarski zbir.

$= 3a^2 + \underline{5a^2b} - \underline{a^2b} + \underline{b} - \underline{\underline{3b}} + 4 =$ Sabiramo slične monome.

$= 3a^2 + 4a^2b - 2b + 4$

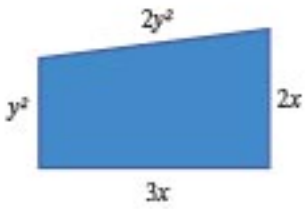
Zadatak 2

Nađi zbir monoma:

a) a^2 i $-3a$, b) $2a^2b$, ab^2, b, $-a^2b$ i $-6ab^2$, c) $4x^3y^2$, $5x^2y$, xy, $-5x^2y$ i $4x^3y^2$.

Zadatak 3

Nađi obim trapeza na 1.



crtež 1

Oduzimanje monoma

Aktivnost

Anina visina je data izrazom $3x$, a visina njenog oca izrazom $5x$. Napiši izraz koji pokazuje koliko je Anin otac viši od Ane.

Primjer 6

Nađi razliku monoma $5a^2$ sa monomom a^2.

Uočimo da su dati monomi slični. Primjenom distributivnog zakona dobijamo

$5a^2 - a^2 = (5 - 1)\,a^2 = 4a^2.$

Razlika monoma sa sličnim monomom je monom čiji je koeficijent jednak razlici koeficijenta umanjenika i koeficijenta umanjioca, a glavni dio je jednak glavnom dijelu vrijednosti umanjenika (umanjioca).

Prema tome, razlika dva slična monoma je monom sličan njima.

Primjer 7

Nađi razliku: a) $-6x^3 - 2x^3$, b) $2x^2y - (-5x^2y)$.

a) $-6x^3 - 2x^3 = (-6 - 2)x^3 = -8x^3$, b) $2x^2y - (-5x^2y) = (2-(-5))x^2y = 7x^2y$.

Zadatak 4

Nađi razliku: a) monoma $-5x^2$ sa monomom $-5x^2$, b) monoma $2xy$ sa monomom $-2xy$.

Primjer 8

Nađi razliku monoma $2x^3y$ sa monomom $5x^2$.

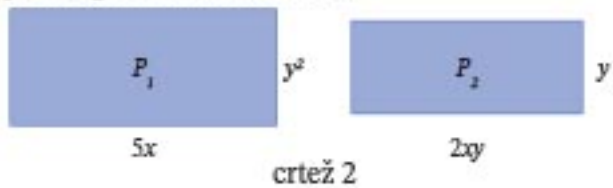
Dati monomi nisu slični. Tražena razlika je algebarski zbir $2x^3y + (-5x^2) = 2x^3y - 5x^2$.

Zadatak 5

Nađi razliku: a) monoma $-4a^2b$ sa monomom $5ab$, b) monoma $2x^2y$ sa monomom $-2x^3y$.

Primjer 9

Nađi razliku površina pravougaonika na crtežu 2:



crtež 2

Površine datih pravougaonika su $P_1 = 5xy^2$ i $P_2 = 2xyy = 2xy^2$.
Njihova razlika će biti $P_1 - P_2 = 5xy^2 - 2xy^2 = (5 - 2)xy^2 = 3xy^2$.

Primjer 10

U školi je organizovana akcija sadnje drveća. Učenici osmog razreda sade drveće u različitim redovima. Ana je u prvom redu posadila $3x$ drvca, a u drugom još $5x$ drvca. Bojan je u trećem redu posadio $9x$ drvca, ali je zbog malog prostora morao da ukloni $2x$ drvca.

a) Koliko je drvca Ana ukupno posadila?
b) Koliko je drvca Bojanu ostalo nakon uklanjanja?
c) Ko je na kraju posadio više drvca i za koliko?

a) Ana je posadila $3x + 5x = 8x$ drvca.
b) Bojan je posadio $9x$ drvca, ali je uklonio $2x$, pa je Bojan posadio $9x - 2x = 7x$ drvca.
c) Razlika u broju zasađenih stabala između njih je $8x - 7x = x$. Ana je zasadila x više stabala nego Bojan.

Zadatak 6

Prvog dana, Jana je posadila $2x^2$ lala, drugog dana je posadila 5 lala više, a trećeg dana, x^2 više nego drugog dana.
a) Napiši izraz koji predstavlja ukupan broj lala koje je Jana posadila.
b) Pojednostavi izraz dobijen pod a).

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Nađi zbir monoma:
   a) y^2 i $3y^2$, b) $-x^2y$ i $4x^2y$, c) $-5x^3$ i $-5z^3$, č) $3abc$ i $4a^2b^2c^2$.
2. Odredi zbir monoma:
   a) $6xy^2$, xy^2 i $3\,xy^2$, b) $5xy$, $-xy$, $-2xy$ i $4xy$, c) $-3x^2$, $-2x^2$, x^2 i $-x^2$, č) b^3, $2b^3$, $3b^3$ i $4b^3$.
3. Od monoma $-2x^3$ oduzmi monom: a) $5x^3$, b) x^3, c) $-2x^3$, č) $-3x^3$.
4. Od monoma $5x^3y^3$ oduzmi monom: a) $3x^3y^3$, b) $7x^3y^3$, c) $-4x^3y^3$, č) $-x^3y^3$.
5. Od zbira monoma $-4a^2b$ i $-3a^2b$ oduzmi monom $-5a^2b$.
6. Od zbira monoma $-3xy^2$ i $2xy^2$ oduzmi njihovu razliku.
7. Pojednostavi izraz:
   a) $8a^2 + 3a^2 + 4a^2 + 3$, b) $2x^2 - y^3 - 4x^2 + 3y^3 - 1$,
   c) $a - 4b^2 + 2a - b^2 + 1$, č) $4x^2 + 2y^2 - 3x^2 + y^2 - x^2 - 2$.
8. Pojednostavi izraz:
   a) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x^2$, б) $\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$, c) $\frac{2}{3}x+5-\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$.
9. Prvog dana Oleg je pretrčao $2x^3$ metra, drugog dana x^3 metra više, trećeg dana $2x$ metara više nego drugog dana, a četvrtog dana $2x$ metara više nego prvog dana.
   a) Napiši izraz koji predstavlja ukupan broj metara koje je Oleg pretrčao tokom sva četiri dana.
   b) Uprosti izraz dobijen pod a).

3. POLINOM. STEPEN POLINOMA

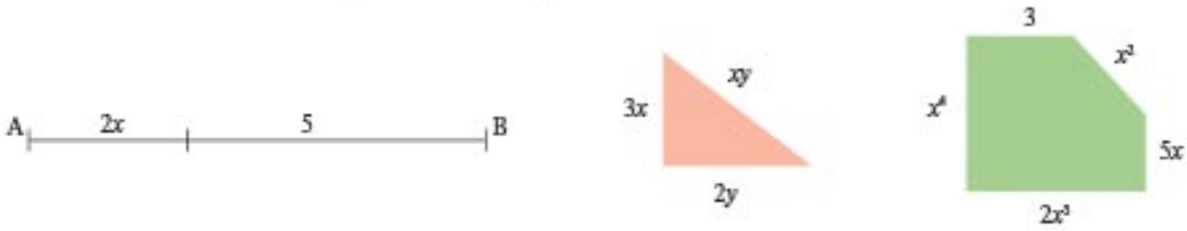
Polinom. Polinom u normalnom obliku

Aktivnost

Od koliko monoma je formiran izraz: a) $7a^2b + 4ab^2$, b) $4x^5 - 2x^3y + y^6$?

Primjer 1

Prema podacima na crtežu 1, napiši izraz za:
a) dužinu duži AB, b) obim trougla,
b) obim petougla.
Od koliko monoma se sastoji svaki od dobijenih izraza?



crtež 1

a) Dužina duži AB zapisuje se kao $2x + 5$.
b) Izraz za obim trougla je algebarski zbir $3x + 2y + xy$.
c) Obim petougla zapisuje se kao $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.
Izraz $2x + 5$ je algebarski zbir dva monoma, izraz $3x + 2y + xy$ je algebarski zbir tri monoma, a izraz $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$ je algebarski zbir pet monoma.

- Izraz koji predstavlja algebarski zbir konačno mnogo monoma naziva se **polinom**.
- Monomi koji čine polinom nazivaju se **članovi polinoma**.

Polinomi su, na primjer, izrazi: $x^2 - xy + 1$, $2a + 3$, $y^3 - 2y^2 + y + 4$ i $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.
Članovi polinoma $a^7 - 2a^3 + a - 5$ su monomi: a^7, $-2a^3$, a i -5.

Primjer 2

Koji od izraza $3x^6 - x + 5$, $\frac{3}{5b}$, $a + 1$, $\frac{x+2}{y}$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$, $\frac{1}{x} + 3$, $8a^2b$ su polinomi?

Polinomi su izrazi: $3x^6 - x + 5$, $a + 1$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$ i $8a^2b$.
Izrazi $\frac{3}{5b}$, $\frac{x+2}{y}$ i $\frac{1}{x} + 3$, nisu polinomi jer sadrže dijeljenje sa promjenljivom.

Aktivnost

Svedi ga u normalan oblik i pronađi koeficijent monoma:
a) $5x^2y^3xy^2$, b) $-3a^3ab^24aab^2$.

Primjer 3

Svedi polinom $2x^3 + 3xx^2 - 4$ u normalan oblik.

Prvo, treba da provjerimo da li je svaki monom u polinomu u normalnom obliku.
Monom $3xx^2$ nije u normalnom obliku.
Pišemo $2x^3 + 3xx^2 - 4 = 2x^3 + 3x^3 - 4$.
Dobijeni polinom sadrži slične monome, koje možemo sabrati, pa imamo:

$$2x^3 + 3x^3 - 4 = 5x^3 - 4$$

Dobili smo polinom koji se ne može dalje pojednostaviti, pa je polinom sveden na normalni oblik binom $5x^3 - 4$.

- **Polinom** je u normalnom obliku ako ne sadrži slične članove i svi njegovi članovi su u normalnom obliku.
- Koeficijenti monoma koji čine polinom u normalnom obliku nazivaju se **koeficijentima polinoma**.

Polinom $5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ je u normalnom obliku. Njegovi koeficijenti su: 5, 6, -2 i 4.

Zadatak 1

Koji od sljedećih polinoma su u normalnom obliku:
a) $x^3 - (xy)^2 + 4$, b) $2xx^2 - 3x + x + 5$, c) $5xy + 6x + 1$, č) $3a + 4b + 5$?

Primjer 4

Svedi polinom u normalan oblik:
a) $4xy + 5x - xy + x + 1$, b) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$.
c) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$

a) $4\underline{xy} + 5\underline{\underline{x}} - \underline{xy} + \underline{\underline{x}} + 1$ — Podvlačimo monome koji su međusobno slični.
$= (4 - 1)xy + (5 + 1)x + 1 =$ — Sabiramo slične monome.
$= 3xy + 6x + 1$

b) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$
$= ab - \underline{\underline{b}} + \underline{2a} + \underline{\underline{3b}} + a + 4$
$= ab + 2b + 3a + 4$

c) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$
$= \underline{\underline{3x^3}} - \underline{7x} + \underline{6x} + \underline{x^2} + \underline{\underline{x^3}} + \underline{x} + \underline{3x^2}$
$= 4x^3 + 4x^2$

Zadatak 2

Svedi polinom u normalan oblik:
a) $5xy + 6x - 3xy + 1$, b) $2a + 5b - 3 - b + 3a + 6b + 4$, c) $x^3 - (3x)^2 + x - 8$,
č) $3xx^3 - 2x + 7x + x^2y^2 + 1$, ć) $xy + 3xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y^2$.

Aktivnost

Koliko članova ima polinom: a) $xy^3 + 2xy$, b) $3b + 4$, c) $x^3 + 2x + 1$?

Polinom sa dva člana naziva se binomni polinom ili **binom**.

U saglasnosti sa definicijom, svaki monom je polinom. Pošto je svaka konstanta monom, možemo zaključiti da su konstante polinomi.
Nakon što dati polinom dovedemo u normalan oblik, prema broju članova, razlikujemo kada je polinom monom, binom ili polinom sa više članova.

Primjer 5

Koji od polinoma $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a^2b^2$, $2x - 5x + 4x$, $-4x^5+7$ i $7x^3y$ su:
a) monomi, b) binomi?

Polinomi $-4x^3 + 7$ i $7x^2y$ su u normalnom obliku.
Zapišimo i polinome $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a^2b^2$, $2x - 5x + 4x$ u normalnom obliku.

$5xx^2 - 3x + x = 5x^3 - 3x + x = 5x^3 - 2x$, $\quad \frac{x}{5} - \frac{x}{5} = 0 \cdot x = 0$,

$5a^2b^2 + 2a^2b^2 = 7a^2b^2$, $\quad 2x - 5x + 4x = x$

a) Monomi su polinomi 0, x, $7a^2b^2$ i $7x^2y$.
b) Binomi su polinomi $5x^3 - 2x$ i $-4x^3 + 7$.

Zadatak 3

Koji od polinoma $-6xy + 5xy$, $2xx + 5$, $x^4 + 2xx^3 + x^2 + 5xx$ i $x^2 + 3x^2$, su:
a) monomi, b) binomi?

Stepen polinoma

Kao i kod monoma, tako i kod polinoma, možemo definisati stepen polinoma.

Primjer 6

Nađi stepen polinoma: a) $5x^2y + 6xy + 1$, b) $3xy^2 + 2xy^2 - (3xy) + 2xyx^2y^2$.

Da bismo našli stepen polinoma, polinom mora biti sveden na normalan oblik.
a) U ovom slučaju, polinom je u normalnom obliku.
Monom $5x^2y$ ima stepen $1 + 2 = 3$. To je najviši stepen među stepenima monoma u polinomu, tako da je stepen polinoma $5x^2y + 6xy + 1$ jednak 3.
b) Prvo, ćemo svesti polinom u normalan oblik:
$3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2xyx^2y^2 = 3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2x^3y^3 = 5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$.
Među tri monoma u polinomu, monom $2x^3y^3$ ima najviši stepen $3 + 3 = 6$.
Zaključujemo da je stepen polinoma $5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$ jednak 6.

Stepen polinoma u normalnom obliku naziva se najviši stepen među stepenima monoma od kojih je sastavljen polinom.

Zadatak 4

Nađi stepen polinoma:

a) $2xy + x + 3$, b) $a + 5b + 4$, c) $x^3 - x^2 + 5x - 8$,
č) $xx^2 - x^3 + 7x + xy$, ć) $xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y$, d) $2x^2y^3 + xy^2z - 3xy^2z + xxyy^2$.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koji od sljedećih izraza $2x^3 - 8$, $3x + 7x + 1$, $4xy^2 - xy + x^2y - xy$, $2y^2 - yy$, $ab - 3a + 4b + 5ab$, $9x + x$, $2(xy)^2 + 3x^2y$ su:
a) monomi, b) binomi?

2. Upotrebom monoma $\frac{5}{6}a^2$, $\frac{2}{5}a$, $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{4}{9}a^3$ и $-\frac{3}{4}a$ napiši po tri od svakog:
a) binoma sa stepenom 3, b) polinoma sa stepenom 2, c) polinoma sa stepenom 3.

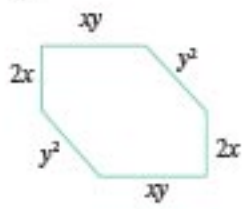
3. Nađi stepen polinoma:
a) $x + 5$, b) $ab + 1$, c) $x^3 + x - 1$, č) $xy^3 + x + xy$, ć) $x^5y - y^5 + x^2y^2$,
d) $ab - 3a^2b + aab + 4ab$, dž) $2x^2 + y^3 + xy^2z - 3$, đ) 23.

4. Napiši polinom stepena: a) 7, b) 2, c) 1.

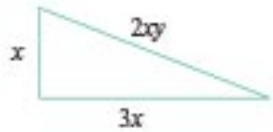
5. Napiši polinom u normalnom obliku:
a) $a + 5b - 7 - a + 2a + 6b + 4$, b) $xy + 5x - 4xy + 2$, c) $2x^3 - 3x^2 + xxx - x^2$,
č) $3x^3 - 2x + 7x^2 + x^3 + 5x + 2x^2 + 1$, ć) $xyx + 3xy^2 + 4xxy - 3xyy + 2xy$.

6. Napiši izraz za obim figure i svedi ga na normalni oblik (crtež 2)

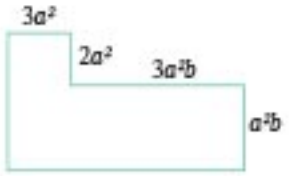
a)



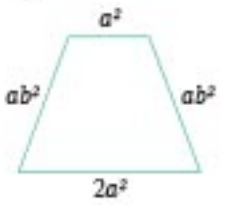
b)



c)



č)

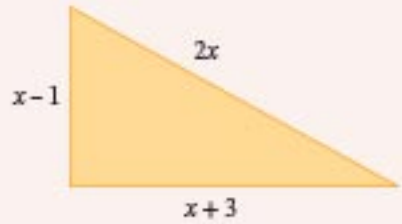


crtež 2

4. SABIRANJE I ODUZIMANJE POLINOMA

Aktivnost

Napiši izraz za obim trougla na crtežu 1 i pojednostavi ga.



crtež 1

Primjer 1

Nađi zbir:

a) monoma $2x^2$ i polinoma $2x^3 + 3x^2 + x + 4$, b) polinoma $3x^2 + x^2y + x + 4$ i $5x^2y + 3xy + 2$.

a) $2x^2 + (2x^3 + 3x^2 + x + 4)$ — Oslobađamo se zagrada.
$= 2x^2 + 2x^3 + 3x^2 + x + 4$ — Svodimo slične monome.
$= 2x^3 + 5x^2 + x + 4$ — Poređujemo članove polinoma po stepenu.

б) $(3x^2 + x^2y + x + 4) + (5x^2y + 3xy + 2)$
$= 3x^2 + x^2y + x + 4 + 5x^2y + 3xy + 2$
$= 3x^2 + \underline{x^2y} + x + \underline{\underline{4}} + \underline{5x^2y} + 3xy + \underline{\underline{2}}$
$= 3x^2 + 6x^2y + x + 3xy + 6$

Polinomi (monom sa polinomom) sabiraju se tako što se jednom polinomu (monomu) uzastopno dodaju članovi drugog polinoma. Zatim se u dobijenom polinomu svode slični monomi.

Zadatak 1

Nađi zbir polinoma:

a) $4x^2 - 5x + 3$ i $5x^2 - x + 1$,
b) $3x^3 + 5x^2 + 2x + 4$ i $x^3 - 3x^2 + x$,
c) $4x^2 + 5x^2y + y + 2$ i $5x^2y + 3y + 5$,
č) $x^2y + 2x^3y + xy + 4x$ i $5x^2y + 3x - 2xy$.

Zadatak 2

Jedna njiva daje (x^2+2xy) kg pšenice, a druga $(3x^2-xy+4y)$ kg.

a) Sastavi izraz koji prikazuje ukupnu žetvu.

b) Svedi dobijeni polinom na normalan oblik.

Primjer 2

Od polinoma $x^3 - 3x^2 + 1$ oduzmi monom $2x^2$.

$(x^3 - 3x^2 + 1) - 2x^2$	Oslobađamo se zagrada.
$= x^3 - 3x^2 + 1 - 2x^2$	Svodimo slične monome.
$= x^3 - 5x^2 + 1$	Poređujemo članove polinoma.

Primjer 3

Od polinoma $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ oduzmi polinom $x^3 - 3x^2 + 3x$.

$(2x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x)$	Oslobađamo se zagrada. Znak minus (–) ispred
$= 2x^3 + x^2 + 2x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x$	zagrade mijenja znakove članova u polinomu
$= \underline{2x^3} + \underline{x^2} + \underline{2x} + 1 - \underline{x^3} + \underline{3x^2} - \underline{3x}$	u suprotne. Svodimo slične monome.
$= x^3 + 4x^2 - x + 1$	Poređujemo članove polinoma.

Polinomi se oduzimaju tako što se polinomu – umanjeniku uzastopno dodaju članovi polinoma – umanjioca sa suprotnim znacima. Zatim se u dobijenom polinomu svode slični monomi.

Iz riješenih primjera možeš vidjeti da su dati polinomi zapisani u zagradama, a zatim se oslobađamo zagrada. Na osnovu pravila za sabiranje i oduzimanje polinoma, mogu se izvesti sljedeća pravila za oslobađanje od zagrada:

- Ako **ispred zagrade stoji znak plus (+)**, onda se zagrada može izostaviti, i znaci članova u zagradi ostaju nepromijenjeni.
- Ako **ispred zagrade stoji znak minus (–)**, onda se zagrada i znak minus mogu izostaviti, a znaci članova u zagradi se mijenjaju u suprotne.

Zadatak 3

Od polinoma $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ oduzmi:
a) monom $5x^3$, b) binom $-3x^2 + 2$, c) polinom $2x^3 + x^2 + x + 1$.

Zadatak 4

Izračunaj razlike:
a) $(3x^2 + 2xy - 8y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$, b) $(6x^2 - 5xy + 4y^2) - (2x^2 - 3y^2)$.

Primjer 4

U kabinetu iz biologije, učenici istražuju rast dvije različite vrste biljaka u zavisnosti od količine đubriva koju primaju. Rast prve biljke opisan je polinomom $2x^2 + 3x + 4$, a rast druge biljke polinomom $x^2 + 5x + 2$.
Poslije nekoliko dana, istraživači dodaju dodatnu količinu đubriva, što povećava rast svake biljke za $2x$ jedinice.

a) Koliki će biti novi rast svake biljke nakon dodavanja đubriva?
b) Koliki će biti ukupan rast obje biljke zajedno nakon dodavanja đubriva?
c) Koliko je rast prve biljke veći od rasta druge biljke nakon dodavanja đubriva?

a) Novi rast prve biljke bit će:
$(2x^2+3x+4)+2x=2x^2+\underline{3x}+4+\underline{2x}=2x^2+\ 5x+4.$
Novi rast druge biljke bit će:
$(x^2+5x+2)+2x=x^2+\underline{5x}+2+\underline{2x}=x^2+7x+2\,.$

b) Ukupan rast se dobija sabiranjem oba polinoma:
$(2x^2+5x+4)+(x^2+7x+2)=\underline{\underline{2x^2}}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{4}}+\underline{x^2}+\underline{7x}+\underline{2}=3x^2+12x+6.$

c) Da bi se uporedio rast, polinomi se oduzimaju:
$(2x^2+5x+4)-(x^2+7x+2)=\underline{\underline{2x^2}}+\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{4}}-\underline{x^2}-\underline{7x}-\underline{\underline{2}}=x^2-2x+2\,.$
Prva biljka ima rast za $x^2 - 2x + 2$ veći od druge biljke.

Zadatak 5

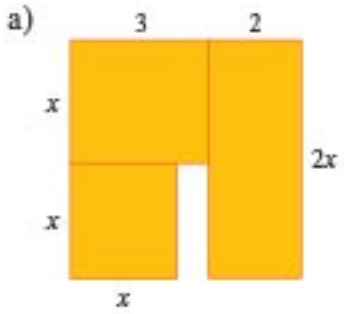
Učenici pripremaju cvjetne leje u školskom dvorištu. Prvu leju uredila je Marijina grupa, a drugu Petrova grupa.
Broj cvjetova zasađenih u prvoj leji dat je polinomom $2x^2 + 3x + 5$, a broj cvjetova zasađenih u drugoj leji polinomom $x^2 + 4x + 2$ (x je dužina leje).

a) Koliko cvjetova su posadile obje grupe zajedno? b) Koliko cvjetova više ima prva leja?

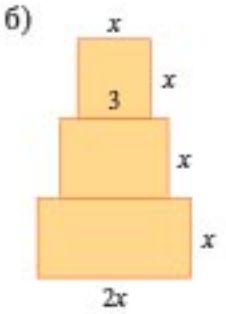
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Saberi polinome:
   a) $-2x^2 + 3x - 5$ i $3x^2 + 4x + 2$, b) $7x^3 + 2x + 6$ i $3x^3 + 5x^2 - 5$, c) $x^2 + x - 1$ i $3x^3 + 2x^2 - 3$.
2. Nađi zbir $(x^4 + 4x^2y - 5xy - 2x + 7) + (2y^3 - 4x^2y + 3xy + y - 6)$.
3. Odredi razliku $(2x^2 + 3xy - 5y - 2x + 4) - (2y^3 - 4xy + 2y - 3)$.
4. Saberi polinom $9x^3 + 10x^2 - 5x + 7$ i razliku binoma $x + 2$ и $x^3 + 9$.
5. Izračunaj polinom P:
   a) $5a^2 + 2a - 3 + P = 9 - 6a + 2a^2$, b) $5b^2 + b + 15 - P = 15 + 3b + 7b^2$.

6. Napiši polinom u normalnom obliku kojim ćeš izraziti površinu oblika sa crteža 2 i crteža 3.



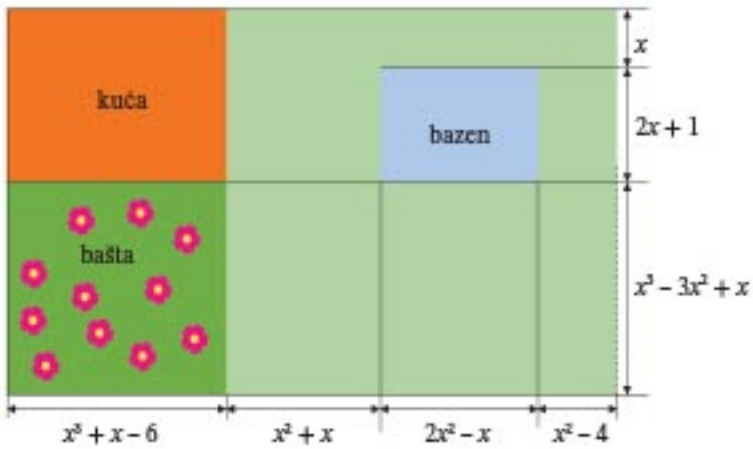
crtež 2



crtež 3

7. Tokom trke automobila, nakon x sekundi prvi automobil je prešao $20x^2 + x + 50$ metara, drugi $15x^2 + x + 30$ metara, a treći $10x^2 + x + 20$ metara.
Koliko metara iznosi rastojanje između:
a) prvog i drugog automobila, b) drugog i trećeg automobila,
c) prvog i trećeg automobila?

8. Crtež 4 prikazuje dvorište sa kućom, baštom i bazenom. Napiši polinom u normalnom obliku koji će izraziti obim: a) bazena, b) kuće, c) cijelog dvorišta.



crtež 4

Istraživanje

Dati su polinomi $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2 - 4$ i $C = -2x^3 + 4$.
a) Nađi stepen polinoma A, B, C, $A + B$, $A + C$. Šta primjećuješ?
b) Prema primjeru, kakva je veza između stepena polinoma – sabiraka i stepena polinoma – zbira?
c) Izvedi opšti zaključak o vezi između stepena polinoma – sabiraka i stepena polinoma – zbira.

5. MNOŽENJE POLINOMA

Množenje monoma

Активност

1. Pomnoži stepene $x^3 \cdot x \cdot x^2$.
2. Marko radi u laboratoriji. Potrebno je da pripremi paket boca sa hemijskim rastvorom. Svaka boca treba da ima istu količinu, koja se izračunava prema izrazu $2x^2y$. Kolika je ukupna količina rastvora koju treba da pripremi Marko, ako pakovanje sadrži:
   a) 16 boca, b) x boca?

Primjer 1

Nađi proizvod monoma $-4x^2y^3$ i $5x^3yz$

Primjenom komutativnog i asocijativnog svojstva množenja, dobijamo da je:
$-4x^2y^3 \cdot 5x^3yz = (-4 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot (y^3 \cdot y) \cdot z = -20x^5y^4z$
Monom $-20x^5y^4z$ je proizvod monoma $-4x^2y^3$ i $5x^3yz$.

Proizvod dva monoma je monom čiji je koeficijent jednak proizvodu koeficijenata množilaca, a glavna vrijednost je jednaka proizvodu glavnih vrijednosti množilaca.

Za množenje monoma važe komutativni i asocijativni zakon. Stoga, možemo govoriti o proizvodu nekoliko sličnih monoma.

Primjer 2

Izračunaj proizvod monoma a) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4$, b) $-a^2bc \cdot 5ab^3c$, c) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2$.

a) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4 = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot a^2 \cdot a^4 = \frac{2}{3}a^6$,
b) $-a^2bc \cdot 5ab^3c = -1 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^3 \cdot c \cdot c = -5a^3b^4c^2$,
c) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2 = 2 \cdot (-5) \cdot 1 \cdot x \cdot x^3 \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z^2 = -10x^4y^2z^3$.

Zadatak 1

Izračunaj proizvod monoma:
a) $3x^2 \cdot 4x^4$, b) $-2a^3b \cdot (-ab^2c)$, c) $6x^2y \cdot (-4xyz) \cdot \frac{1}{3}y^2z$.

Primjer 3

Jedan fizičar izračunava energiju koju proizvodi mašina. Energija zavisi od sile i rastojanja, koji su dati algebarskim izrazima: $F = \frac{3}{2}x^2y^3$ i $s = \frac{4}{3}x^3y$.

Kolika je ukupna energija E koju proizvodi mašina, ako važi formula $E = F \cdot s$?

Prema formuli za ukupnu energiju E koju proizvodi mašina, imamo

$E = F \cdot s = \frac{3}{2}x^2y^3 \cdot \frac{4}{3}x^3y = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^2y^3 \cdot x^3y = 2x^5y^4.$

Znači, mašina proizvodi energiju izraženu monomom $2x^5y^4$.

Zadatak 2

Mirsad je vozio $3xy$ sati istom brzinom od $12x^2y$ kilometara na sat. Nađi put koji je prešao, ako za brzinu v, vrijeme t i put s važi formula $s = v \cdot t$.

Množenje polinom so monom

Aktivnost

Koristeći distributivno svojstvo množenja u odnosu na sabiranje i oduzimanje, pojednostavi izraze: a) $2 \cdot (3x + 4)$, b) $(3x + 4) \cdot 2$.

Primjer 4

Izvrši množenje:

a) $-3x \cdot (2x + 1)$, b) $(2a + b - 1) \cdot (-a^2)$, c) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3)$, č) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2$.

a) $-3x \cdot (2x + 1)$ — Množimo monom sa svakim članom polinoma.

$= -3x \cdot 2x + (-3x) \cdot 1$ — Dobijene proizvode sabiramo.

$= -6x^2 - 3x,$ — Polinom svodimo na normalan oblik.

b) $(2a + b - 1) \cdot (-a^2) = 2a \cdot (-a^2) + b \cdot (-a^2) - 1 \cdot (-a^2) = -2a^3 - a^2b + a^2,$

c) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3) = 4x^3 \cdot x^2 + 4x^3 \cdot 2x + 4x^3 \cdot 3 = 4x^5 + 8x^4 + 12x^3,$

č) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2 = 5x \cdot x^3y^2 - 3y^3 \cdot x^3y^2 = 5x^4y^2 - 3x^3y^5.$

Polinom se množi monomom tako da se svaki član polinoma množi sa monomom, a dobijeni proizvodi se sabiraju.

Zadatak 3

Izvrši množenje:

a) $(3x + 2y) \cdot 5$, b) $3a \cdot (a + 1)$, c) $(2x^2 + x - 4) \cdot 3x$, č) $x^2y \cdot (xy + 2x - 4y^2)$.

Primjer 5

U jednoj tekstilnoj fabrici, dužina tkanine koju proizvodi mašina pod normalnim uslovima izračunava se izrazom $x^3 + 2x^2 - x$. Kada se temperatura u prostoriji poveća, mašina proizvodi $\frac{3}{2}x^2$ puta više tkanine. Kolika je ukupna dužina tkanine koju proizvodi mašina pri povećanoj temperaturi?

Ukupna dužina tkanine dobija se množenjem polinoma i monoma:

$$(x^3 + 2x^2 - x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = x^3 \cdot \frac{3}{2}x^2 + 2x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 + (-x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3 .$$

Pri povećanoj temperaturi, mašina će proizvesti ukupnu dužinu $\frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3$.

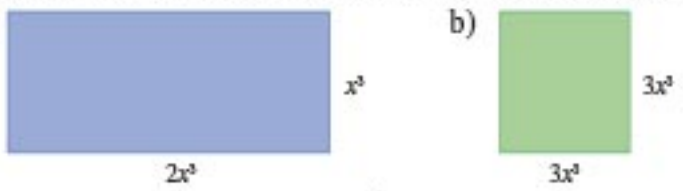
Zadatak 4

Baštovan želi da posadi različite vrste biljaka u školskoj bašti. Jedno drvo košta $4x^2y + 3xy^2 - 5$ denara, jedan grm košta $2x^2y - xy^2 + 4$ denara, a jedan cvijet košta $5xy^2 - 3x^2y + 2$ denara. Baštovan je kupio 3 drveta, 4 grma i 5 cvjetova.

a) Napiši izraz za ukupnu cijenu za svaku vrstu biljaka.
b) Napiši izraz za ukupnu cijenu svih biljaka.
c) Napišite polinom pod b) u normalnom obliku.
č) Odredi stepen svakog monoma i stepen svakog polinoma..

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Nađi proizvod monoma:
   a) $5x^3 \cdot 2x^4$, b) $-\frac{1}{4}a^2b \cdot (-2a^3b^2)$, c) $9xy^2 \cdot (-2x^3yz^2) \cdot \frac{1}{6}yz$.
2. Izvršite množenje:
   a) $4 \cdot (5x - y)$, b) $-7 \cdot (2x - 3y)$, c) $(x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \cdot 2x$, č) $-xy^2 \cdot (5x^2 + 2xy - 4y^2)$.
3. Pomnoži zbir monoma $-3a^2b^3$ i $2a^2b^3$ sa monomom $-4ab$.
4. Pomnoži razliku monoma $-xy^2$ i $3xy^2$ njihovim zbirom.
5. Napiši monom u normalnom obliku koji izražava površinu pravougaonika (crtež 1)

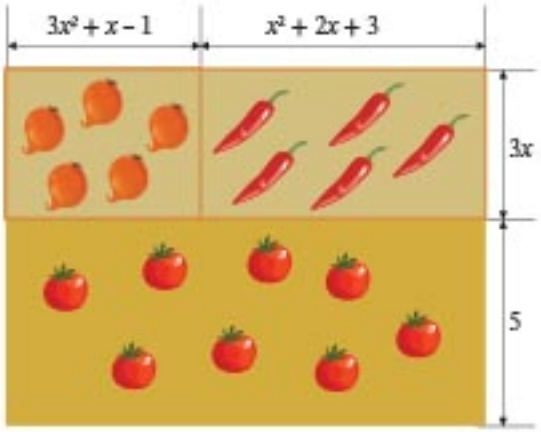


crtež 1

6. Mia ima $4(x^2 + x + 1)$ knjige. Lina ima $5(2x^2 + 3)$ knjiga. Koliko knjiga Mia i Lina imaju zajedno?
7. Igor, Sara i Nina sakupljaju poštanske marke. Igor ima $4x(x - 4)$ marki. Sara ima $2x(8 - x)$ marki, a Nina ima $8(7 + 2x)$ marki. Koliko poštanskih markica imaju djeca zajedno?

8. Baka Mara je u svojoj bašti posadila paradajz, paprike i luk. Prema izrazima za dimenzije na crtežu 2, napiši polinom u normalnom obliku koji će izraziti površinu:

a) dijela zasađenog lukom,
b) dijela zasađenog paradajzom,
c) dijela zasađenog paprikama,
č) cijele bašte



crtež 2

Istraživanje

Dati su polinomi $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2$ i $C = -2x^3 + 4$.
a) Nađi stepen polinoma A, B, C, $A \cdot B$ i $B \cdot C$. Šta primjećuješ?
b) Prema primjeru, kakva je veza između stepena polinoma – množilaca i stepena polinoma – proizvoda?
c) Izvedi opšti zaključak o vezi između stepena polinoma – faktora i stepena polinoma – proizvoda.

6. DIJELJENJE POLINOMA MONOMOM

Dijeljenje monoma

Aktivnost

Podijeli stepene $x^7 : x^3$.

Primjer 1

Podijeli monom $12x^5y^4z^2$ sa monomom $4x^2yz$.

Zapisujemo količnik $12x^5y^4z^2 : 4x^2yz$. CDijeljenjem svakog činioca iz djeljenika odgovarajućim činiocem iz djelioca i zapisivanjem dobijenih količnika kao proizvoda, dobijamo
$12x^5y^4z^2 : 4x^2yz = (12 : 4) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^4 : y) \cdot (z^2 : z) = 3x^3y^3z$.

Monom se dijeli monomom tako što se koeficijent djeljenika dijeli sa koeficijentom djelioca, a stepeni promjenljivih glavne vrijednosti djelioca dijele se sa stepenima odgovarajućih promjenljivih glavne vrijednosti djelioca, a zatim se dobijeni količnici zapisuju kao proizvod.

Primjer 2

Izračunaj količnik monoma: a) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4$, b) $-20a^3bc^2 : 4abc$, c) $-14x^3y^3 : (-7x^2y)$.

a) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4 = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) \cdot (a^7 : a^4) = (\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}) \cdot (a^7 : a^4) = \frac{5}{6}a^3$,

b) $-20a^3bc^2 : 4abc = (-20 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b : b) \cdot (c^2 : c) = -5a^2c$,

c) $-14x^3y^3 : (-7x^2y) = (-14 : (-7)) \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^3 : y) = 2xy^2$.

Primjer 3

Količnik $8a^2 : 4ax = \frac{8a^2}{4ax} = \frac{2a}{x}$ nije monom jer imamo dijeljenje sa promjenljivom.

To znači da količnik monoma sa monomom može biti i izraz koji nije monom.

Zadatak 1

Izračunaj količnik monoma:

a) $\frac{2}{9}a^5b^3 : \frac{1}{6}a^2b$, b) $-18a^4b^3c^2 : 6a^2b^2c$, c) $-9x^2y : (-15x^2y)$.

Primjer 4

Jedan inženjer istražuje gustinu materijala, koja se dobija dijeljenjem mase sa zapreminom.

Masa i zapremina materijala izražavaju se formulama $m = \frac{9}{4}x^5y^3$ i $V = \frac{3}{2}x^2y$.

Kolika je gustina ρ materijala, $\rho = \frac{m}{V}$ važi formula?

Ako podijelimo monom $\frac{9}{4}x^5y^3$ sa monomom $\frac{3}{2}x^2y$, dobijamo

$$\rho = \frac{9}{4}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y = (\frac{9}{4} : \frac{3}{2}) \cdot (x^5y^3 : x^2y) = (\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^3 : y) = \frac{3}{2}x^3y^2.$$

Gustina materijala iznosi $\rho = \frac{3}{2}x^3y^2$.

Dijeljenje polinoma monomom

Aktivnost

Koristeći desno distributivno svojstvo dijeljenja u odnosu na sabiranje i oduzimanje, pojednostavi izraz $(6x + 4) : 2$.

Primjer 5

Izvrši dijeljenje:

a) $(18x + 12y) : 6$, b) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3)$,

c) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$, č) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y$.

Primjenom desnog distributivnog svojstva dijeljenja u odnosu na sabiranje i oduzimanje, dobijamo:

a) $(18x + 12y) : 6$ Dijelimo svaki član polinoma sa monomom.

$= 18x : 6 + 12y : 6$ Dobijene količnike sabiramo.

$= 3x + 2y$, Polinom svodimo na normalan oblik.

b) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3) = 3x^5 : (-x^3) + x^4 : (-x^3) - 4x^3 : (-x^3) = -3x^2 - x + 4$,

c) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$

$= -9a^3b^2 : (-3a^2b^2) - 6a^2b^3 : (-3a^2b^2) + 15a^3b^3 : (-3a^2b^2)$

$= 3a + 2b - 5ab$

č) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y = 8x^3y : 2x^3y + 6x^2y : 2x^3y = 4 + \frac{3}{x}$.

Dobijamo izraz u kome jedan od njegovih članova, $\frac{3}{x}$ nije monom. Znači, količnik polinoma i monoma takođe može biti i izraz koji nije polinom.

Polinom se dijeli monomom tako što se svaki član polinoma dijeli sa datim monomom, a dobijeni količnici se sabiraju.

Zadatak 2

Izvrši dijeljenje: zadaci:

a) $(14x + 21) : 7$, b) $(27x^3y^4 - 36x^2y^3) : 9xy^3$,

c) $(4x^6 - x^4 + x^2) : (-2x^2)$, č) $(10x^2y^3 - 5x^3y^2 + 9x^3y^2) : (-15x^2y^2)$.

Primjer 6

Jedan farmer dijeli površinu za navodnjavanje na nekoliko jednakih dijelova. Ukupna količina vode koja treba da se podijeli po cijeloj površini izračunava se polinomom $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$. Potrebno je da voda bude podjednako raspoređena na svaki dio površine, a svaki dio je predstavljen monomom $\frac{3}{2}x^2y$. Koliku količinu vode će svaki dio primiti?

Podijelit ćemo monom $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$ sa monomom $\frac{3}{2}x^2y$.

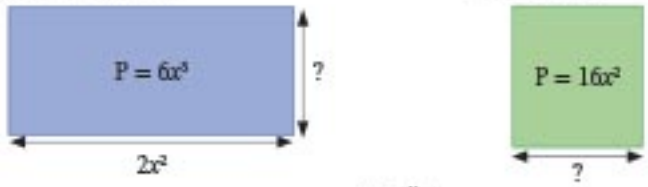
$$\left(\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y\right) : \frac{3}{2}x^2y = \frac{9}{2}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y + 3x^4y^2 : \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{4}x^3y : \frac{3}{2}x^2y$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{5-2}y^{3-1} + 3\cdot\frac{2}{3}x^{4-2}y^{2-1} - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x^{3-2}y^{1-1} = 3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x.$$

Svaki dio površine će primiti količinu vode izraženu polinomom $3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$.

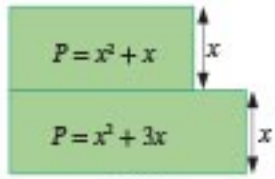
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj količnik monoma:
   a) $-8x^4y^3 : (-20x^2y)$, b) $\frac{3}{5}a^5b : \frac{3}{10}a^3b$, c) $\frac{3}{7}a^4b^3c^2 : (-\frac{5}{14}abc)$.
2. Izvrši dijeljenje
   a) $(32a - 24b) : (-8)$, b) $(9x^2y + 12x^4y^2) : 3x^3y$,
   c) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : x^3$, č) $(14a^4 - 7a^3 + 24a^2) : (-21a^2)$.
3. Podijeli zbir monoma $6a^4b^3$ i $9a^4b^3$ sa monomom $-5ab^2$.
4. Podijeli razliku monoma $8xy^2$ i $6xy^2$ sa njihovim zbirom.
5. Napiši monom u normalnom obliku koji izražava stranicu (crtež 1):
   a) pravougaonik b) kvadrat

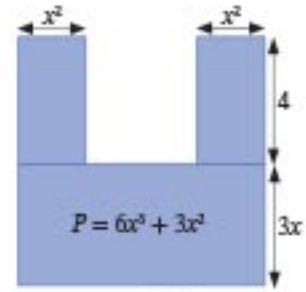


crtež 1

6. Napiši polinom u normalnom obliku, koji će izraziti obim svakog od oblika na crtežu 2 i na crtežu 3.



crtež 2



crtež 3

7. POJEDNOSTAVLJIVANJE CIJELIH RACIONALNIH IZRAZA

Aktivnost

Pojednostavi izraz: a) $2c(a + 1)$, b) $3a(b - c) - 5$.
Šta predstavljaju izrazi koje si dobio/la nakon pojednostavljivanja svakog od datih izraza?

Izrazi u kojima su konstante i promjenljive povezane sa operacijama sabiranja, oduzimanja, množenja i stepenovanja sa nenegativnim cjelobrojnim eksponentom nazivaju se **cijeli racionalni izrazi**.

U skladu sa definicijom, cijeli racionalni izraz **ne sadrži dijeljenje sa promjenljivom**. Poslije pojednostavljivanja (izvršavanja navedenih operacija i oslobađanja od zagrada), cijeli racionalni izraz pretvara se u polinom. To znači da je **svaki polinom cijeli racionalni izraz**.

Cijeli racionalni izrazi su, na primjer, izrazi $-3x^2 + 2x + 5$, $(a + 1)(a - 2) + 4$, $\frac{3c^2 - 2}{6}$ itd.
Kao i kod polinoma (monoma), smatrat ćemo da su konstante u cijelom racionalnom izrazu racionalni brojevi i da promjenljive uzimaju vrijednosti u skupu racionalnih brojeva.
Zato, za pojednostavljivanje cijelog racionalnog izraza, važe ista pravila redoslijeda za izvršavanje operacija i oslobađanje od zagrada kao i kod racionalnih brojeva.
Dalje, riječ „izraz" značit će „cijeli racionalni izraz".

Primjer 1

Pojednostavi izraz $-(4ab + 6a - 7b) + (-ab - 2a + 3b) - (-ab + 2a + 3b)$.

$-(4ab + 6a - 7b) + (-ab - 2a + 3b) - (-ab + 2a + 3b)$	Oslobađamo se zagrada.
$= -4ab - 6a + 7b - ab - 2a + 3b + ab - 2a - 3b$	Svodimo na slične monome.
$= -\underline{4ab} - \underline{6a} + \underline{7b} - \underline{ab} - \underline{2a} + \underline{3b} + \underline{ab} - \underline{2a} - \underline{3b}$	Poređujemo članove
$= -4ab - 10a + 7b.$	dobijenog polinoma.

Zadatak 1

Pojednostavi izraz:
a) $10x - 6y + (3x - 5y) - (-4y - 2x)$,
b) $-(-a^2b + 3ab^2) - (7a^2 - ab^2 + 2b + 2a^2b)$.

Primjer 2

Pojednostavi izraz: $-5y(x^3 - y) - x^3(2 - y)$.

$-5y(x^3 - y) - x^3(2 - y)$	Oslobađamo se zagrada primjenom
$= -5yx^3 + 5y^2 - 2x^3 + x^3y$	distributivnog svojstva.
$= \underline{-5yx^3} + 5y^2 - 2x^3 + \underline{x^3y}$	Svodimo slične monome.
$= -4yx^3 + 5y^2 - 2x^3.$	

Zadatak 2

Pojednostavi izraz:
a) $9y - 2(3x + 5y) + 4x - xy$,
b) $(x^2 - 0{,}4x^2y) \cdot 5x - 0{,}5y \cdot (y^2 - 6x^2y)$.

Primjer 3

Pojednostavi izraz:
$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$.

$$\begin{aligned} & 2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7) \\ &= 2a + 3a^2 - 3a - 4a^2 + 5b^2 \\ &= \underline{2a} + \underline{\underline{3a^2}} - \underline{3a} - \underline{\underline{4a^2}} + 5b^2 \\ &= -a^2 - a + 5b^2 \end{aligned}$$

Zadatak 3

Pojednostavi izraz:
a) $(4x^2y + x^2y^2 + 6xy^2) : 2 + x(xy - y^2)$, b) $(3a^2 + 6a - 9b) : 3 + (-28b) : (-4) + 2a$.

Primjer 4

Pojednostavi izraz:

$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\,\}$

$$\begin{aligned} & 8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\,\} && \text{Oslobađamo se malih zagrada množenjem.} \\ &= 8a - \{8ab + 6b^2 - [\, 2a - 15ab - 3a^2\,] - 4b^2\,\} && \text{Oslobađamo se srednjih zagrada.} \\ &= 8a - \{8ab + 6b^2 - 2a + 15ab + 3a^2 - 4b^2\,\} && \text{Oslobađamo se velikih zagrada.} \\ &= 8a - 8ab - 6b^2 + 2a - 15ab - 3a^2 + 4b^2 && \text{Grupišemo slične monome.} \\ &= \underline{8a} - \underline{\underline{8ab}} - \underline{\underline{6b^2}} + \underline{2a} - \underline{15ab} - 3a^2 + \underline{\underline{4b^2}} && \text{Pojednostavljujemo polinom.} \\ &= -3a^2 + 10a - 23ab - 2b^2 \end{aligned}$$

Zadatak 4

Pojednostavi izraz:
a) $-\{\, 9x - [\, 4y \cdot (6 - x) - x \cdot (2 + 3y)\,] + (x - 3) \cdot 8y\,\}$, b) $0{,}2xy - \{\, 0{,}3y^2 + [0{,}5y + 0{,}2y \cdot (3x - 5y)]\}$.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Pojednostavi izraz:
   a) $a + b - 3 - a + 2a + 5b + 4$, b) $(3x^2 - 8) - (7x + 2) - (-x^2 - 6) - 2x + 5$.
2. Dati su polinomi $A = x^2 - 3x + 1$, $B = 5x^2 + 2x - 3$ i $C = 4x^2 + 3x$.
   Nađi polinome: a) $A + B + C$, b) $C - A$, c) $B - A - C$, č) $A - B$.
3. Pojednostavi izraz: a) $4a\,(a + b - 2)$, b) $-3a^2\,(5 - b) - 4b\,(2a^2 - 1) - 3(b - a^2)$.
4. Pojednostavi izraz:
   a) $2x^2 + x\,(4x - 1)$, b) $2x^3\,(3x^2 - 1) - 4x(x^2 + 1)$,
   c) $5xy^2 + 3y(x + xy - y) - 4xy$, č) $2x(x - y^2) + 7y + 4(x^2 + y) - 3xy$.

5. Pojednostavi izraz:
a) $5x^2 + (9x^4 - 6x^3 + 3x^2) : (-3) + 2x^3$, b) $(y^2 - 4y) \cdot (-y) + 8y^3 : (-2)$.

6. Pojednostavi izraz:
a) $2x^2 + x(x^2 - 3x + 1) + (5x^3 + 4x^2) : (-2) + 5$, b) $x(x + 3) + 2(x^2 + 2x + 1) - (x - 1) \cdot x$.

7. Pojednostavi izraz:
a) $3x(4x^2y - xy + 1) - x(xy + 2)$, b) $(3y^2 - 6x^2y + 12xy) : 3 + y(4x - 2y)$,
c) $2x(x^2y - 2xy + 1) + 2y \cdot (3x^3 - 5y) - x^2y$.

8. Pojednostavi izraz:
a) $6x^2 + 3x(5x - 2)$, b) $2x(3x^2 - 1) - 4(x + 1)$,
c) $6xy^2 + 5y(x + xy - 2y) - 7xy$, č) $2x(3x - y) + 9y + 7(x^2 + y) - 5xy$,
ć) $-3x(x^2 - 2y + 1) - 5y(-x + 4)$, d) $2x(x + 5y) + y(5x - 7y) - x^2(x - 3)$,
dž) $2a(b - 4) - b(2a - 3) + ab(5a - 1)$.

9. Pojednostavi izraz:
a) $\{x^2 - [4x - x \cdot (2x + 3)] + (3x - 2) \cdot x\}$, b) $0{,}3y^2 - \{0{,}5xy^2 + [0{,}8y + (3x - 4) \cdot 0{,}5y^2]\}$.

8. ZAMJENA PROMJENLJIVIH CIJELIM BROJEVIMA U CIJELIM RACIONALNIM IZRAZIMA I U FORMULAMA

Aktivnost

Kako ćeš izračunati obim pravougaonika koristeći formulu $L = 2(a + b)$, ako su stranice $a = 3$ cm i $b = 2$ cm?

Ako promjenljive u **cijelom racionalnom izrazu** zamijenimo brojevima, onda cijeli racionalni izraz postaje brojni izraz i možemo da izračunamo njegovu vrijednost.

Primjer 1

Izračunaj brojnu vrijednost izraza $2x + 5$, za $x = 3$.

$2x + 5$
$= 2 \cdot 3 + 5$ Promjenljivu x zamijenimo datom vrijednošću 3.
$= 11$ Izračunamo brojnu vrijednost dobijenog izraza.

Primjer 2

Izračunaj brojnu vrijednost izraza $2x^2 + 3y - 1$ za $x = 3$ i $y = -4$.

Na mjesto promjenljivih x i y, zamjenjujemo odgovarajuće date vrijednosti

$2x^2 + 3y - 1 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) - 1 = 18 - 12 - 1 = 5.$

Brojna vrijednost izraza za $x = 3$ i $y = -4$ iznosi 5.

Primjer 3

Ako je $x = -1, y = 3$ i $z = -2$, izračunaj vrijednost izraza:

a) $3x^4 + y^2 + 5z^3$, b) $4(5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$.

a) $3x^4 + y^2 + 5z^3$
$= 3 \cdot (-1)^4 + 3^2 + 5 \cdot (-2)^3$
$= 3 + 9 - 40$
$= -28$

b) $4 \cdot (5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$
$= 4 \cdot (5 \cdot (-1)^3 - \frac{3^2}{3} - (-2))$
$= 4 \cdot (-5 - 3 + 2)$
$= 4 \cdot (-6)$
$= -24$

Skeniraj kod i riješi zadatke

Zadatak 1

Ako je $x = 2, y = -3, z = 4$, izračunaj vrijednost izraza:

a) $4x^2 + y^3 - 3z$, b) $5x - 2y - 3z$, c) $x^4 : (-2x^2) - y^3 + 2z^2$, č) $\frac{3x^2 + 2y}{6} - \frac{z^2}{8}$.

Podsjetimo se da je **formula** iskaz koji izražava vezu između nekoliko veličina (promjenljivih) i prema kojem izračunavamo jednu od njih.
Zamjena u formuli je postupak pomoću kojeg na mjesto promjenljivih u formuli zapisujemo date vrijednosti za promjenljive.

Primjer 4

Izračunaj obim L jednakokrakog trougla koristeći formulu $L = a + 2b$, ako je osnova $a = 3$ cm i stranica $b = 5$ cm.

$L = a + 2b$	
$L = 3 + 2 \cdot 5$	U formuli zamjenjujemo date vrijednosti za stranice.
$L = 13$ cm	Izračunavamo brojnu vrijednost dobijenog brojnog izraza.

Zadatak 2

Put koji pređe automobil izračunava se formulom $s = v \cdot t$, gdje je v brzina u km/h, a t vrijeme u satima. Koliki će put automobil preći ako je:
a) $v = 60$ km/h i $t = 2$ h, b) $v = 80$ km/h i $t = 3$ h?

Primjer 5

Nađi vrijednost stranice a pravougaonika sa obimom $L = 46$ cm, ako je $b = 5$ cm.

U formuli za obim pravougaonika $L = 2(a + b)$ zamjenjujemo poznate vrijednosti $L = 46$ cm i $b = 5$ cm i rješavamo jednačinu sa jednom nepoznatom:

$46 = 2(a + 5)$
$23 = a + 5$
$a = 18$ cm

Primjer 6

Izračunaj vrijednost u u formuli $v = u + at$, ako je $v = 35$, $a = -2$ i $t = 14$.

Zamjenom datih vrijednosti za promjenljive u formuli dobijamo

$v = u + at$
$35 = u + (-2) \cdot 14$
$35 = u - 28$
$u = 35 + 28$
$u = 63$

Primjećujemo da u nekim slučajevima, zamjenom u datoj formuli, dobijamo jednačinu koju treba riješiti.

Zadatak 3

Data je formula $y = 5x - 2$. Nađi vrijednost x, ako je: a) $y = 18$, b) $y = 33$, c) $y = 0$.

Primjer 7

Cijena C karata za grupnu posjetu bioskopu izračunava se po formuli $C = 120a + 80b + 20c$, gdje je a broj odraslih, b je broj djece i c je broj osoba sa posebnim popustom.

a) Izračunaj cijenu karata ako grupa ima 10 odraslih, 4 djece i 2 osobe sa posebnim popustom.
b) Ako grupa ima 1580 denara za karte, a potrebno je da uđu 4 djece i 3 osobe sa posebnim popustom, koliko karata za odrasle može da se kupi?

a) Zamjenom datih vrijednosti za promjenljive u formuli, dobijamo
$C = 120a + 80b + 20c = 120 \cdot 10 + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 1560$ denara

b) Zamjenom datih vrijednosti za cijenu i broj ljudi u formuli
$C = 120a + 80b + 20c$ dobijamo jednačinu
$120a + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 1580$
$120a + 320 + 60 = 1580$
$120a = 1580 - 380$
$120a = 1200$
$a = 10$
Može se kupiti 10 karata za odrasle.

Zadatak 4

Majstor Kiro naplaćuje farbanje stanova po formuli $C = 100x + 80y + 250$,
gdje je x površina koju treba ofarbati, y je količina boje u kilogramima koja će se koristiti,
a 250 denara su troškovi njegovog dolaska.

a) Izračunaj cijenu koju treba platiti ako je za farbanje stana površine 85 m^2 potrebno 5 kg boje.

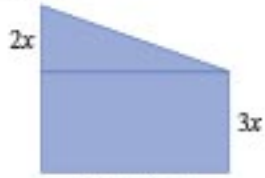
b) Bojan je za svoj stan površine 40 m^2 platio majstoru 6740 denara. Koliko kilograma boje je majstor potrošio za Bojanov stan?

Zadatak 5

Napiši formulu za površinu svakog od oblika na crtežu 1 i crtežu 2, pojednostavite je, a zatim izračunajte površinu ako je $x = 3$ cm.



crtež 1



crtež 2

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Ако $x = -6$, пресметај ја вредноста на изразот: a) $2x^2 + 5$, b) $-3(x^2 - 4)$.

2. Ako je $x = -2, y = 4$, izračunaj vrijednost izraza: a) $x^3 - y + 5$, b) $2x^2 - y^2 + 3$.

3. Ako je $x = 4, y = 1, z = -2$ izračunaj vrijednost izraza: a) $x^2 - 5y + z^4$, b) $4(x + y) - z^2$.

4. Ako je $x = 3, y = -1, z = 2$ izračunaj vrijednost izraza:
a) $4(2x^2 - y^2) + 2(z^3 + 1)$, b) $3(x^3 + 2) - 2yz$.

5. Ako je $x = -3$ i $y = 2$, izračunaj vrijednost izraza:
a) $4(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, b) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

6. Ako je $a = -2$ i $b = 4$, izračunaj vrijednost izraza:

a) $-(ab-3)+2a-(-4a^3+2b-5)$, b) $2b-(3ab-9)-(-2a^2+b^2-1)$.

7. Izračunaj vrijednost t iz formule $v = u + at$, ako je $u = -5$, $a = 3$ i $v = 4$

8. Nađi vrijednost x iz formule $y = -2x + 7$, ako je : a) $y = 3$, b) $y = -3$.

9. Nađi vrijednost y iz formule $z = xy + 2$, ako je : a) $z = 26$ i $x = 3$, b) $z = -40$ i $x = 6$.

10. Formula za ukupnu masu M u dekagramima smutija je $M = 2x^2y + 3xy + 4z$, gdje je x broj banana, y je broj jabuka, a z je broj narandži.

a) Izračunaj masu M smutija napravljenog od 3 banane, 2 jabuke i 5 narandži.

b) Koliko jabuka Jovana treba da stavi, ako stavi 2 banane i 5 narandži, i želi da dobije ukupno 62 dekagrama smutija?

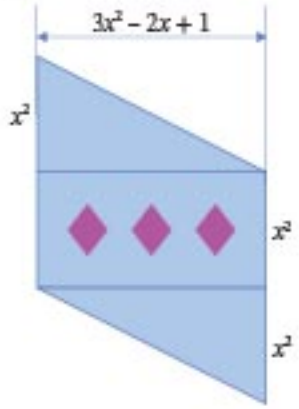
11. Zapiši formulu za površinu tepiha, pojednostavi je, a zatim izračunaj površinu ako je $x = 2$ dm. (crtež 3 i crtež 4)

a)



crtež 3

b)



crtež 4

Istraživanje

Dat je izraz $4x^2$.

a) Izračunaj vrijednost izraza za $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

b) Nacrtaj i dopuni tabelu:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Vrijednost izraza							

c) Za koju vrijednost x izraz ima najmanju vrijednost?

č) U kojem dijelu tabele vrijednosti opadaju, a u kojem se povećavaju?

ć) Zabilježite vrijednosti za: $x = -3$ i $x = 3$, $x = -2$ i $x = 2$, $x = -1$ i $x = 1$.

Da li postoji „simetrija“ u dobijenim brojevima? Objasnite svojim riječima.

d) Objasni kako se vrijednost izraza mijenja, povećava ili smanjuje:

- kada x raste od -3 do 0,
- kada x raste od 0 do 3?

9. SASTAVLJANJE I RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNAČINA

Linearna jednačina

Aktivnost

Razgledaj jednačine: $3x-7=2$, $-\frac{1}{3}a+2=0$ i $2(y-1)=4$.

a) Koliko nepoznatih ima svaka jednačina? b) Koliki je stepen promjenljive?
c) Koji brojevi su koeficijenti jednačine?

- Jednačina oblika
  $ax+b=c$, gdje su a i b racionalni brojevi i $a\neq 0$
  naziva se linearna jednačina sa jednom nepoznatom.
- **Rješenje** linearne jednačine sa jednom nepoznatom je bilo koji racionalan broj za koji jednačina postaje tačna brojna jednačina.

Uvidjeli smo da svaka jednačina koja se može svesti na oblik gore pomenute linearne jednačine sa jednom nepoznatom treba da se smatra linearnom jednačinom sa jednom nepoznatom. Osim toga, umjesto linearne jednačine sa jednom nepoznatom, reći ćemo linearna jednačina ili samo jednačina.
Linearne jednačine su, na primjer, jednačine $2x-4=7$, $-3(z+1)=z+1$, $-\frac{1}{3}x-4=3x$, itd.
U postupku rješavanja jednačina, primijenit ćemo model koji uključuje upotrebu simbola za promjenljive i konstante. Simboli su pravougaonici i kvadrati koji, prema svojoj boji i obliku, imaju vrijednost kao u tabeli:

simbol				
vrijednost	x	$-x$	1	-1

Jednačinu sastavljamo sabiranjem simbola koji se nalaze na istoj strani od znaka $=$.

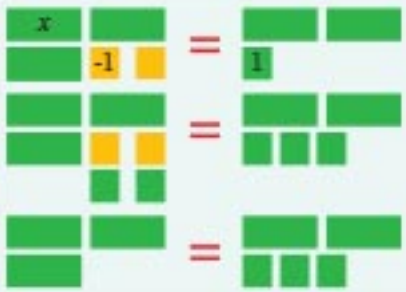
Primjer 1

Prema modelu na crtežu 1, sastavi jednačinu i riješi je.



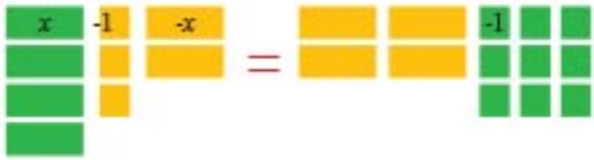
crtež 1

Prema modelu, obje strane jednačine zapisujemo sabiranjem odgovarajućih simbola.

	/+  Dodavanjem dva zelena kvadrata sa obje strane eliminišemo žute kvadrate sa lijeve strane.	$3x-2=2x+1$ $3x-2=2x+1\ /+2$ $3x-2+2=2x+1+2$ $3x=2x+3$
	/+  Dodavanjem dva žuta pravougaonika sa obje strane eliminišemo zelene pravougaonike sa desne strane.	$3x=2x+3\ /-2x$ $3x-2x=2x+3-2x$
	Dobijamo rješenje za 	$x=3$

Zadatak 1

Prema modelu na crtežu 2, sastavi jednačinu i riješi je.



crtež 2

Algebarski postupak za rješavanje jednačina

Iz postupka rješavanja jednačine po datom modelu, sigurno si primijetio sljedeća pravila za rješavanje jednačine:

- Ako se isti broj ili izraz doda ili oduzme sa lijeve i desne strane date jednačine, dobija se jednačina koja će imati isto rješenje kao i data jednačina.
- Ako se lijeva i desna strana jednačine pomnože ili podijele brojem koji nije 0, dobija se jednačina koja će imati isto rješenje kao i data jednačina.

Primjenom ovih pravila, komutativnog i asocijativnog svojstva sabiranja, kao i distributivnog svojstva množenja u odnosu na sabiranje i oduzimanje, možemo dobiti **algebarski postupak** za rješavanje bilo koje jednačine.

Skeniraj kod i riješi jednačine.

Primjer 2

Riješi jednačinu: a) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, b) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1$, c) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2$.

a) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ — Množimo obje strane jednačine sa NZS (3, 6) = 6

$2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}/\cdot 6$ — da bismo se oslobodili imenilaca.

$12x+1=4/-1$ — Oduzimamo 1 od obje strane jednačine tako da samo član x ostane na jednoj strani.

$12x=3/:12$ — Dijelimo obje strane sa 12 da bismo dobili rješenje.

$x=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Provjeri: $2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

b) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1/\cdot 18$ — Množimo obje strane jednačine sa NZS (2, 9) = 18.

$18\cdot\frac{x}{2}-18\cdot\frac{2x}{9}=18\cdot 1$

$9x-4x=18$ — Svodimo slične članove.

$5x=18/:5$ — Dijelimo obje strane sa 5.

$x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$

Проверка: $\frac{3\frac{3}{5}}{2}-\frac{2\cdot 3\frac{3}{5}}{9}=1$.

c) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2/\cdot 12$ — Množimo obje strane jednačine sa NZS (4, 6) = 12.

$\frac{3x}{4}\cdot 12+1\cdot 12=\frac{5x}{6}\cdot 12-2\cdot 12$

$3\cdot 3x+12=2\cdot 5x-24$

$9x+12=10x-24/-10x$ — Oduzimamo $10x$ sa obje strane jednačine da bismo eliminisali član x na desnoj strani.

$-x+12=-24/-12$

$-x=-36/:(-1)$

$x=36$

Provjeri: $\frac{3\cdot 36}{4}+1=\frac{5\cdot 36}{6}-2$.

Zadatak 2

Riješi jednačinu a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$, b) $\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{8x}{5}+1\frac{1}{4}$.

Primjer 3

Riješi jednačinu: a) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$, b) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$.

a) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$ Oslobađamo se zagrada.

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20}$ NZS(5, 2, 4, 20) = 20

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20} \mid \cdot 20$

$4x-30=-35+3x \mid -3x$

$x-30=-35 \mid +30$

$x=-5$

Provjeri: $\frac{-5}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3(-5)}{20}$.

b) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$

$1{,}2x+4{,}5=-2{,}4x+4{,}5 \mid -4{,}5$

$1{,}2x=-2{,}4x \mid +2{,}4x$

$3{,}6x=0 \mid :3{,}6$

$x=0$

Provjeri:
$1{,}2\cdot 0+4{,}5=-3\cdot(0{,}8\cdot 0-1{,}5)$.

Zadatak 3

Riješi jednačinu: a) $\frac{x}{2}-(0{,}15+\frac{x}{3})=0{,}25$, b) $2{,}3x-3(0{,}7x+0{,}5)=-4{,}5$.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Prema modelu na crtežu 3, sastavi jednačinu i riješi je.



crtež 3

Riješite jednačine od zadatka 2 do zadatka 9.

2. a) $2x-\frac{x}{2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$, b) $x-\frac{2}{3}=\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$, c) $\frac{3x-1}{9}=\frac{1}{6}+6$.

3. a) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{2}=x-\frac{1}{10}$, b) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-5=2$, c) $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}$.

4. a) $\frac{2x}{3}-3{,}5=\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$, b) $0{,}4(x-1)+0{,}6-\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$, c) $x-\frac{1}{3}(x+2)-0{,}5=-\frac{x}{6}+5$.

5. a) $\frac{x-1}{4}=-\frac{x}{3}$, b) $\frac{2x}{3}+1=2x+\frac{1}{3}$.

6. a) $0{,}8x-2{,}4=0{,}6(x+1)$, b) $2{,}5(3x+1)=0{,}5(2x+3)$.

7. a) $\frac{x-4}{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$, b) $\frac{x+1}{5}+\frac{x}{10}=\frac{x}{2}+\frac{1}{5}$, c) $\frac{2x}{3}-9=\frac{4x}{9}-7$, č) $\frac{3x-1}{10}=\frac{x+1}{2}$.

8. a) $\frac{5}{18}(x-1)+\frac{1}{4}=-\frac{x}{2}$, b) $4(x-\frac{1}{4})-3(\frac{1}{3}+x)=2x-7$.

9. a) $\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}-1{,}5x-\frac{3}{8}=\frac{11}{12}$, b) $\frac{4}{3}-0{,}75\cdot(2x-5)=\frac{5}{6}x$.

Istraživanje

Učenici Ana, Boris i Erdal rješavali su linearne jednačine sa racionalnim koeficijentima. Svako od njih je napravio grešku na drugom mjestu u rješenju. Pronađi greške i riješi jednačine ispravno.

Ana	Boris	Erdal
$\frac{1}{2}x+5=\frac{3}{4}x+2$	$\frac{2}{3}(x-3)=\frac{1}{2}x+1$	$\frac{3}{4}x-2=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x=2-5$	$\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{2}x+1$	$12\cdot\frac{3}{4}x-2=12\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}x=-3$	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x=1+3$	$9x-2=4x+\frac{1}{2}$
$x=-12$	$\frac{1}{6}x=4$	$9x-4x=\frac{1}{2}+2$
	$x=24$	$5x=\frac{5}{2}$
		$x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

10. PRIMJENA LINEARNIH JEDNAČINA SA JEDNOM NEPOZNATOM

Sastavljanje i rješavanje jednačine za dati tekstualni zadatak

Jednačine omogućavaju rješavanje tekstualnih zadataka tako što se nepoznate veličine povezuju sa datim veličinama.

Aktivnost

Jedan broj je za 7 veći od drugog broja. Zbir dva broja je 31.

a) Koji je manji broj?

b) Kolika je razlika između dva broja?

c) Koji je rezultat ako se zbir brojeva oduzme od broja 7? Objasni svoj odgovor.

Primjer 1

Eva je zamislila broj. Pomnožila ga je sa 4, zatim oduzela 3 i tako dobila broj koji je za 0,6 veći od broja koji je zamislila. Koji je broj koji je Eva zamislila?

Broj koji je Eva zamislila označit ćemo sa x.
Prema uslovima zadatka, sastavljamo linearnu jednačinu:



Rješavamo jednačinu:
$4x - 3 = x + 0{,}6$
$4x - 3 = x + 0{,}6 \;/\; -x$
$3x - 3 = 0{,}6 \;/\; + 3$
$3x = 3{,}6 \;/\; : 3$
$x = 1{,}2$

Provjeri: $4 \cdot 1{,}2 - 3 = 1{,}2 + 0{,}6$.

Eva je zamislila broj 1,2.

Zadatak 1

Cijena olovke je $\frac{2}{5}$ od cijene gumice. Olovka i gumica zajedno koštaju 40 denara. Koliko košta gumica, a koliko košta olovka?

Skeniraj kod i sastavi izraze.

Primjer 2

Prvog dana trodnevne ekskurzije, Nina je potrošila $\frac{1}{4}$ od novca koji je ponijela.
Drugog dana je potrošila 200 denara, tako da joj je trećeg dana ostalo $\frac{2}{3}$ od početnog iznosa.
Koliko novca je Nina ponijela na ekskurziju?

Označimo sa x iznos koji je Nina ponijela na ekskurziju.
Prema uslovima zadatka:

- prvog dana je potrošila $\frac{1}{4}x$ denara
- drugog 200 denara
- trećeg dana je imala $\frac{2}{3}x$ denara.

Njihov zbir je početni iznos koji je Nina ponijela, pa rješavamo jednačinu:

$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x$
$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x \;/\cdot 12$
$3x + 2400 + 8x = 12x$

$11x + 2400 = 12x / -12x$
$11x - 12x + 2400 = 12x - 12x$
$-x + 2400 = 0 / -2400$
$-x + 2400 - 2400 = 0 - 2400$
$-x = -2400 / \cdot (-1)$
$x = 2400$

Provjeri: $\frac{1}{4} \cdot 2400 + 200 + \frac{2}{3} \cdot 2400 = 2400$

Nina je ponijela 2400 denara na ekskurziju.

Zadatak 2

Darja je potrošila $\frac{3}{7}$ novca koji je imala za sveske $\frac{5}{14}$ novca za olovke i 150 denara za blok za crtanje. Koliko je novca Darja imala?

Primjer 3

Alma i Nela su krenule u kupovinu sa istom količinom novca. Nakon što je Alma potrošila 400 denara i pozajmila Neli 400 denara, $\frac{3}{4}$ od Alminog trenutnog iznosa bilo je jednako $\frac{1}{2}$ Nelinog trenutnog iznosa. Po koliko su novca Alma i Nela imale kada su otišle u kupovinu?

Početni iznos koji je svaka od djevojčica imala označit ćemo sa x.
Poslije potrošenih 400 i pozajmljenih 400 denara:
Alma je imala $x - 800$ denara.
Nela je imala $x + 400$ denara.
U tom trenutku, prema uslovu zadatka, za novac koji je imala svaka od njih važi sljedeća jednačina:

$$\frac{3}{4} \cdot (x - 800) = \frac{1}{2} \cdot (x + 400).$$

Rješavamo dobijenu jednačinu:

$$\frac{3}{4}(x - 800) = \frac{1}{2}(x + 400) \ / \cdot 4$$
$$3(x - 800) = 2(x + 400)$$
$$3x - 2400 = 2x + 800$$
$$3x - 2x = 2400 + 800$$
$$x = 3200$$

Provjera: $\frac{3}{4} \cdot (3200 - 800) = \frac{1}{2} \cdot (3200 + 400)$

Kada su Alma i Nela krenule u kupovinu, svaka je imala po 3200 denara.

Zadatak 3

Viktor i Martin su imali istu količinu novca. Nakon što je Viktor dao Martinu 600 denara, $\frac{2}{3}$ od Viktorovog trenutnog iznosa bilo je jednako $\frac{1}{2}$ Martinovog trenutnog iznosa. Po koliko su novca Viktor i Martin imali na početku?

Sastavljanje tekstualnih zadataka za datu jednačinu

Primjer 4

Sastavi tekstualni zadatak prema jednačini: a) $2x + 35 = 49$, b) $x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.
Riješi jednačinu i objasni rješenje u vezi sa datim tekstom.

Za datu jednačinu može se sastaviti nekoliko tekstualnih zadataka.

a) Tekstualni zadatak u vezi sa datom jednačinom može da glasi:
Tea je dvostruko starija od svoje sestre i 35 godina mlađa od svoje majke, koja ima 49 godina. Koliko godina ima Teina sestra?

Prema uslovu u zadatku, dolazimo do date jednačine $2x + 35 = 49$.
Rješavamo jednačinu:
$2x + 35 = 49$
$2x = 49 - 35$
$2x = 14$
$x = 7$ Provjera: $2 \cdot 7 + 35 = 49$

Dobili smo broj kojim zaista možemo izraziti godine djeteta. To znači da smo pravilno sastavili zadatak.

b) U datoj jednačini vidimo da je nepoznata x cjelina od koje se oduzimaju dijelovi $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{3}x$ i broj 110, poslije čega ostaje $\frac{1}{10}$ od početne cjeline x.
Možemo da pretpostavimo da je broj x neka količina novca, pa formulišimo sljedeći tekstualni zadatak:

Od novca koji je imao sa sobom, Dime je potrošio $\frac{1}{5}$ denara za sveske, $\frac{1}{3}$ za olovke, 110 denara za flomastere, i ostala mu je $\frac{1}{10}$ od novca. Koliko novca je imao Dime?

Prema uslovu u zadatku, dolazimo tačno do jednačine
$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.
Rješavamo jednačinu:
$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x \;/\cdot 30$
$30x - 6x - 10x - 3300 = 3x$
$11x = 3300$
$x = 300$ Provjera: $300-\frac{1}{5}\cdot 300-\frac{1}{3}\cdot 300-110=\frac{1}{10}\cdot 300$

Dobili smo rezultat koji zaista može izraziti neku količinu novca, što znači da smo sastavili odgovarajući zadatak.

Zadatak 4

Sastavi tekstualni zadatak na osnovu jednačine $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x-60=\frac{2}{5}x$.
Riješi jednačinu i objasni rješenje u kontekstu datog teksta.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Zbir polovine, trećine i četvrtine broja x je za 2 veći od samog broja. Nađi broj x.
2. Goce i Mile su radili u bašti. Goce je radio $\frac{3}{4}$ od vremena koje je Mile radio. Koliko je sati svako od njih radio ako su radili 7 sati ukupno?
3. Odjeljenje 8-A ima jednog učenika više od odjeljenja 8-B. Jednog dana u 8-A $\frac{1}{5}$ učenika bilo je odsutno, a u 8-B $\frac{1}{6}$ učenika bilo je odsutno, i tog dana je u oba odjeljenja bio isti broj učenika. Koliko učenika uči u odjeljenju 8-B?
4. U jednoj školi $\frac{7}{8}$ učenika uči engleski, a ostali uče njemački jezik. Engleski jezik uči 420 više učenika nego njemački. Koliko ukupno učenika ima škola?
5. Svaki učenik 8-A razreda je član tačno jedne sekcije. $\frac{1}{6}$ učenika član je biološke sekcije, $\frac{2}{5}$ učenika su članovi literarne sekcije, a 3 učenika su članovi matematičke sekcije. Koliko učenika ima u 8-A razredu?
6. Četvrtina ugla α i trećina ugla koji je za $60°$ veći od α imaju zbir $62°$. Nađi ugao α.
7. Trećina ugla α je $44°$ manja od ugla koji je tri puta veći od α. Nađi ugao α.
8. Lena i Petar zajedno imaju 117 godina. Lena ima $\frac{4}{5}$ od Petrovih godina. Koliko godina ima Petar?
9. Sin ima jednu četvrtinu majčinih godina, a kćerka jednu polovinu sinovljevih godina. Majka i kćerka zajedno imaju 54 godine. Koliko godina imaju oba djeteta zajedno?
10. Da bi se održala priredba u fiskulturnoj sali, uzete su stolice iz nekih učionica. Od ukupnog broja uzetih stolica, $\frac{1}{5}$ je iz kabineta za hemiju, $\frac{1}{6}$ je iz kabineta za fiziku, $\frac{2}{15}$ je iz kabineta za historiju i 20 stolica iz kabineta za matematiku.
    Koliko ukupno stolica je odneseno u fiskulturnu salu?
11. a) Orhan je imao 4000 denara. Kada je kupio 5 paketa mlijeka, ostalo mu je 720 denara. Koliko košta jedan paket mlijeka?
    b) Atletičar je na treningu istrčao 3850 metara, što iznosi 9 krugova i 250 metara. Koliko metara je dužina jednog kruga?
12. Sastavi tekstualni zadatak prema jednačini: a) $2500 - 3x = 550$, b) $3x + 56 = 177$.

Istraživanje

Zamisli broj, udvostruči ga, dodaj 2, podijeli rezultat sa 2 i oduzmi 1.
Dobio si zamišljeni broj.
Koristeći jednačinu, objasni zašto uvijek dobijaš zamišljeni broj.

11. NIZOVI BROJEVA I OBLIKA

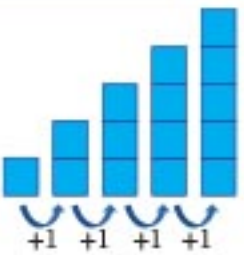
Aktivnost

Koliko kvadrata ima sljedeći član niza?
Koje pravilo koristiš za određivanje sljedećeg člana?
Napiši prvih deset članova kao brojni niz. , ...

Svaki **niz** se sastoji od objekata poredanih po redu, prema nekom pravilu.
Objekti niza nazivaju se **članovi niza**.

Primjer 1

Za oblike na crtežu 1, primjećujemo da svaki sljedeći pravougaonik ima jedan kvadratić više od prethodnog pravougaonika.
Pravilo za određivanje sljedećeg člana je „dodaj 1".



crtež 1

Primjer 2

Razgledajmo brojni niz dat rečenicom: „Svaki sljedeći član jednak je zbiru prethodna dva člana". Da li se ovom rečenicom u potpunosti određuje niz?

Odgovor je ne, jer treba da znamo prvi i drugi član. Treći član je već zbir prvog i drugog člana, četvrti član je zbir drugog i trećeg člana, itd.
U ovom slučaju, niz će biti potpuno određen, na primjer, rečenicom „Prvi član je jedan, drugi član je jedan, a svaki sljedeći član je zbir prethodna dva člana".
Određeni niz je 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Prvi član je 1, drugi član je 1, a pravilo za određivanje sljedećeg člana je „svaki član je zbir prethodna dva".

Pravilo za određivanje sljedećeg člana niza je način na koji se dobija svaki sljedeći član iz prethodnih članova niza.

Niz je potpuno određen **sa prvih nekoliko članova i pravilom za određivanje sljedećeg člana**.

Primjer 3

Zapiši prvih 6 članova niza sa prvim članom 4 i pravilom za određivanje sljedećeg člana „dodaj 5".

Prvih 6 članova niza su: $4, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19, 19 + 5 = 24, 24 + 5 = 29$.

Primjer 4

Dat je niz 2, 6, 10, 14, 18, ...
a) Pronađi pravilo kojim se dobija svaki sljedeći član niza.
b) Napiši sljedeća tri člana niza.

a) Primjećujemo da je svaki sljedeći član za 4 veći od prethodnog. Zato je pravilo za određivanje sljedećeg člana „dodaj 4".



b) Sljedeća tri člana niza su: $18 + 4 = 22$, $22 + 4 = 26$, $26 + 4 = 30$.

Primjer 5

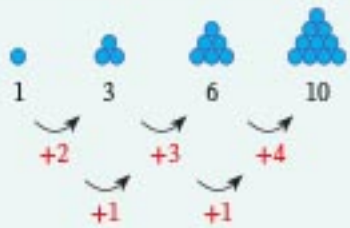
Data su prva 4 člana niza od oblika sa krugovima (crtež 2). Pronađi pravilo za određivanje sljedećeg člana i odredi broj krugova u sljedećem obliku u nizu.



crtež 2

Prva 4 člana niza su 1, 3, 6 i 10 (crtež 3).
Pravilo za određivanje sljedećeg člana glasi:
„dodaj razliku prethodna dva člana uvećanu za 1".
Prema ovom pravilu, sljedeći oblik će imati

$10 + (10 - 6 + 1) = 10 + 5 = 15$ krugova.



crtež 3

Zadatak 1

Dat je niz 3, 9, 15, 21, ...
a) Pronađi pravilo za određivanje sljedećeg člana.
b) Zapiši sljedeća 3 člana niza.
c) Zapiši deseti član niza.

Skeniraj kod i odredi niz.

Sa pravilom za određivanje sljedećeg člana, često imamo poteškoća u pronalaženju članova niza koji imaju veće redne brojeve. Zato su nizovi često dati zavisnošću člana od njegovog rednog broja. Ova zavisnost je data algebarskim izrazom.

Algebarski izraz koji daje zavisnost bilo kojeg člana niza od njegovog rednog broja naziva se **pravilo opšteg člana niza.**

Ako je opšti član poznat, onda se bilo koji član datog niza može lako pronaći.

Primjer 6

Dat je niz sa opštim članom $2n + 3$. Nađi:
a) prvih 5 članova, b) članove sa rednim brojevima 100 i 300.

a) Ako u izrazu za opšti član niza $2n + 3$ zamijenimo redne brojeve prvih pet članova, 1, 2, 3, 4 i 5, dobijamo
$2 \cdot 1 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 + 3 = 7$, $2 \cdot 3 + 3 = 9$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$, $2 \cdot 5 + 3 = 13$.
Dakle, prvih 5 članova niza su: 5, 7, 9, 11 i 13.

b) Da bi se odredili stoti i tristoti član u nizu, u izrazu za opšti član $2n + 3$ zamjenjujemo $n = 100$ i $n = 300$. Tako dobijamo
$2n + 3 = 2 \cdot 100 + 3 = 203$, $2n + 3 = 2 \cdot 300 + 3 = 603$.
Znači, stoti član je 203, a tristoti član je 603.

Zadatak 2

Dat je niz sa opštim članom $4n - 1$. Nađi:

a) prva 3 člana, b) članove sa rednim brojevima 50 i 200.

Ako je poznat opšti član niza, možemo provjeriti da li je neki broj član tog niza.

Primjer 7

Dat je niz sa opštim članom $3n + 4$. Da li njegovi članovi mogu biti brojevi: a) 30, b) 49?

a) Da bismo odgovorili na ovo pitanje, potrebno je da riješimo jednačinu $3n + 4 = 30$.
Dobijamo $3n = 26$, odnosno $n = 26 : 3$. Rješenje jednačine nije prirodan broj.
Broj 30 nije član niza.

b) Slično, rješavamo jednačinu $3n + 4 = 49$, $3n = 45$, $n = 15$.
Rješenje jednačine je prirodni broj 15. Broj 49 je 15. član niza.

Zadatak 3

Dat je niz sa opštim članom $3n + 5$. Može li njegov član biti broj: a) 53, b) 68?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koliko malih jednakostraničnih trouglova ima sljedeći oblik u nizu na slici 4?



crtež 4

2. Pronađi pravilo za određivanje sljedećeg člana niza oblika na crtežu 5. Zatim, precrtaj i popuni tabelu



crtež 5

redni broj oblika	prvi	drugi	treći	četvrti	peti	šesti
broj zvijezda u obliku						

3. Prvi član niza je 100. Svaki sljedeći član niza dobija se pravilom za određivanje sljedećeg člana „dijeljenje sa 2". Pronađi peti član niza.
4. Pronađi pravilo za određivanje sljedećeg člana niza:
   a) 1, 2, 4, 8, 16,..., b) 600, 300, 150, 75,..., c) 12, 26, 40, 54,...,
   č) 89, 86, 83, 80,...., ć) 243, 81, 27, 9,... .
5. Za niz 3, 8, 13, 18,.....:
   a) pronađi pravilo za određivanje sljedećeg člana,
   b) zapiši sljedeća 3 člana niza.
6. Pronađi nepoznate članove a, b, c i d niza i zapiši moguće pravilo za određivanje sljedećeg člana:
   a) a, b, 5, 7, c, d,...., b) a, b,10, 18, c,..., c) a, 24, 18, b, c, d,..., č) a, b, 0, -8, c, d,... .
7. Dat je niz sa opštim članom $3n - 1$. Pronađi:
   a) prva 3 člana, b) članove sa rednim brojevima 54 i 125.
8. Da li brojevi 35, 23, -15, 77, 98 mogu biti članovi niza sa opštim članom $4n + 7$?
9. Knjižara ima popust na čitanje lektira. Prvog dana je prodato 6 lektira, drugog dana je prodato 11 lektira, trećeg dana je prodato 16 lektira, itd.
   Koliko lektira je prodato osmog dana, ako je svakog narednog dana prodato 5 lektira više nego prethodnog?
10. Zoki želi da poreda 55 balvana tako da u gornjem redu bude 1 balvan, a u svakom redu ispod njega po 1 balvan više. Koliko će balvana biti u najdonjem redu?

12. ODREĐIVANJE OPŠTEG ČLANA NIZA

Ako znamo opšti član niza, onda lako možemo pronaći bilo koji član datog niza, bez obzira na njegov položaj u nizu. Zato je potrebno da pronađemo način da bismo odredili opšti član niza.

Aktivnost

Zapiši prva 3 člana niza sa opštim članom: a) $n + 1$, b) $3n - 2$,

Primjer 1

Pronađi opšti član niza čiji je prvi član 2, a pravilo za sljedeći član je „dodaj 3“.

Sastavljamo tabelu, tako što u prvi red tabele unosimo redne brojeve članova, a u drugi odgovarajuće članove niza 2, 5, 8, 11, 14, 17.
U treći red unosimo proizvod razlike između članova niza i rednog broja člana $3n$.

redni broj n	1	2	3	4	5	6
član	2	5	8	11	14	17
$3n$	3	6	9	12	15	18

Sada primjećujemo da treba da smanjimo proizvod $3n$ za 1 da bismo dobili članove niza.
Znači, opšti član ovog niza je $3n - 1$.

Primjećujemo da je niz iz prethodnog primjera rastući.

Da vidimo kako određujemo opšti član ako je niz opadajući.

Primjer 2

Pronađi opšti član niza čiji je prvi član 2, a pravilo za sljedeći član je „oduzmi 3“.

Sastavljamo tabelu, tako da u prvi red, opet, unosimo redne brojeve članova, a u drugi odgovarajuće članove niza $2, -1, -4, -7, -10, \ldots$
Pravilo za određivanje sljedećeg člana je „oduzmi 3“, pa će treći red biti proizvod razlike -3 i rednog broja n.

реден број n	1	2	3	4	5	6
член	2	-1	-4	-7	-10	-13
$-3n$	-3	-6	-9	-12	-15	-18

Primjećujemo da treba da uvećamo proizvod $-3n$ za 5 da bismo dobili članove niza.
Dakle, opšti član ovog niza je $-3n + 5$.

Skeniraj kod i pogledaj kako se kreiraju nizovi.

Primjer 3

Opština je započela projekat za sadnju drveća pored puta koji vodi do škole. Prvog dana su posadili 3 drveta. Svakog narednog dana su sadili po 3 drveta više nego prethodnog dana.
a) Koliko će drveta posaditi trećeg, četvrtog i petog dana?
b) Pronađi opšti član niza.
c) Koliko će drveta ukupno biti zasađeno poslije 10 dana?
č) Ako se radnja nastavi, kojeg uzastopnog dana će biti zasađeno 96 drveta?

a) Prvog dana: 3 drveta; Drugog dana: $3 + 3 = 6$ drveta; Trećeg dana: $6 + 3 = 9$ drveta;
Četvrtog dana: $9 + 3 = 12$ drveta; Petog dana: $12 + 3 = 15$ drveta

b) Dobijeni niz je: 3, 6, 9, 12, 15, ...

redni broj n	1	2	3	4	5	6
član	3	6	9	12	15	18
$3n$	3	6	9	12	15	18

Prema tabeli, vidimo da je opšti član niza $3n$.

c) Desetog dana bit će zasađeno $3 \cdot 10 = 30$ drveta.
Poslije 10 dana bit će zasađeno $30 + 27 + 24 + 21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 165$ drveta.

č) Tražimo redni broj člana 96 u nizu 3, 6, 9,... Rješavamo jednačinu
$3n = 96$, $n = 32$.
Trideset drugi član u nizu je broj 96.

Zadatak 1

Trajče je kupio jelku visine 30 cm. Jelka raste 2 cm sedmično.
a) Koliko će jelka biti visoka poslije 1 mjeseca?
b) Nađi član niza koji daje visinu jelke poslije n sedmica.
c) Koliko će jelka biti visoka poslije 8 mjeseci?
č) Poslije koliko sedmica će jelka biti visoka 230 cm?

Primjer 4

Nađi opšti član niza predstavljenog dijagramom (crtež 1).



crtež 1

Od ukupnog broja krugova u šemi, možemo formirati niz 5, 8, 11,..
Razmotrimo vezu između rednog broja i broja bijelih i plavih krugova:

1 (redni broj) · 3 (bijeli krugovi) + 2 (plavi krugovi) = 5,
2 (redni broj) · 3 (bijeli krugovi) + 2 (plavi krugovi) = 8,
3 (redni broj) · 3 (bijeli krugovi) + 2 (plavi krugovi) = 11.

U svakom članu niza, broj bijelih krugova je 3 · redni broj, a u svakom članu ima dodatna 2 plava kruga.
Opšti član niza će biti $3n + 2$.

Zadatak 2

Pronađi opšti član niza predstavljenog šemom (crtež 2).



crtež 2

Postoje situacije u kojima se dva ili više procesa odvijaju istovremeno, ali prema različitim pravilima. To znači da treba da razgledamo niz čiji su članovi zajednički članovi nekoliko nizova.

Primjer 5

Dat je niz krugova (crtež 3).



crtež 3

a) Koliko krugova ima stoti član niza?

b) Koliko crvenih krugova ima stoti član niza?

c) Koliko zelenih krugova ima član koji ima 20 crvenih krugova?

a) Opšti član niza 3, 6, 9,... , je $3n$. Stoti član će biti $3 \cdot 100 = 300$.

b) Opšti član niza crvenih krugova je $n + 1$. Stoti član je $100 + 1 = 101$.

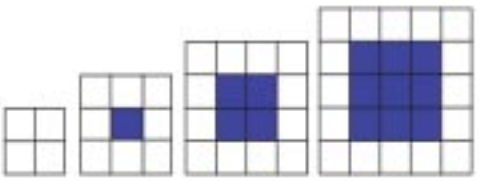
c) Iz $n + 1 = 20$ dobijamo $n = 19$, odnosno u 19. članu bit će 20 crvenih krugova.
Tada je broj krugova jednak $3 \cdot 19 = 57$, odnosno 19. član ima ukupno 57 krugova. Od njih je 20 crvenih, pa će 37 krugova biti zelenih.

Zadatak 3

Dat je niz oblika (crtež 4).

a) Precrtaj i popuni tabelu:

broj plavih kvadrata				
broj bijelih kvadrata				



crtež 4

b) Koliko kvadrata ukupno ima deseti član niza?

c) Koliko bijelih kvadrata ima član niza koji ima 36 plavih kvadrata?

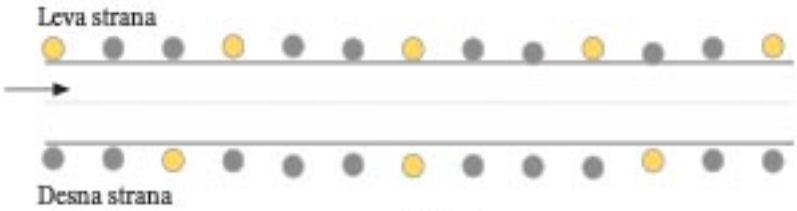
Primjer 6

Na autoputu, svjetiljke sa lijeve i desne strane puta nisu uvijek upaljene. One se pale i gase prema određenim pravilima. Na crtežu 5, žuti krugovi označavaju svjetiljke koje su upaljene, a sivi krugovi označavaju svjetiljke koje su isključene.

a) Pronađi pravilo po kojem se pali svaka sljedeća svjetiljka sa lijeve i svaka sljedeća svjetiljka sa desne strane autoputa.

b) Da li je svjetiljka na poziciji 94 sa lijeve strane upaljena?

c) Na kojim pozicijama su svjetiljke istovremeno upaljene sa obje strane? Pronađi opšte pravilo po kojem se svjetiljke pale istovremeno.



crtež 5

a) Na lijevoj strani, svjetiljke su upaljene na pozicijama

1, 4, 7, 10,....

što znači da je prva svjetiljka upaljena, a pravilo za sljedeću upaljenu svjetiljku je „dodaj 3 pozicije".

Na desnoj strani, svjetiljke su upaljene na pozicijama

3, 7, 11, 15,...,

što znači da je prva upaljena svjetiljka na poziciji 3, a svaka sljedeća svjetiljka se uključuje prema pravilu „dodaj 4 pozicije".

b) Provjerit ćemo da li je 94 član niza 1, 4, 7, 10,... Opšti član niza je $3n - 2$.

Rješavanjem jednačine

$$3n - 2 = 94,\ 3n = 96,\ n = 32,$$

dobijamo da je ovo trideset druga upaljena svjetiljka u nizu.

c) Nizovi sa svjetiljkama lijevo i desno su:

1, 4, 7, 10,13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34,...

3, 7, 11, 15,19, 23, 27, 31, 35,...

Uočavamo koje pozicije se pojavljuju u oba niza, tako da je niz sa upaljenim svjetiljkama na istoj poziciji

7, 19, 31,....

Opšti član niza 7, 19, 31,... je $12n - 5$.

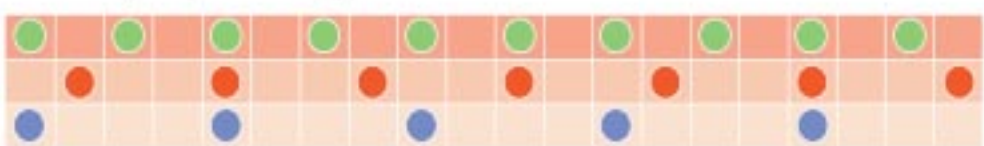
Zadatak 4

Spojena su tri niza novogodišnjih sijalica: jedan zeleni, jedan crveni i jedan plavi. Na crtežu 6 prikazane su sijalice sve tri boje koje su istovremeno uključene. U praznim poljima nalaze se sijalice koje su trenutno isključene.

a) Pronađi pravilo prema kojem se svaka sljedeća sijalica u svakom od tri niza uključuje.

b) Na kojoj sljedećoj poziciji će se upaliti samo crvena sijalica?

c) Zapiši niz pozicija na kojima su uključene sijalice sve tri boje u isto vrijeme. Pronađi opšte pravilo ovog niza.



crtež 6

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Odredi opšti član niza:
   a) 34, 30, 26,..., b) 25, 20, 15, 10,..., c) 8, 15, 22, 29,..., č) 4, 6, 8, 10,....

2. Niz ima prvi član 15, a pravilo sljedećeg člana je „dodaj 5".
   a) Zapiši prvih 6 članova. b) Nađi opšti član niza.
   c) Nađi 225-ti član.

3. Nađi opšti član niza predstavljenog dijagramom na crtežu 7.



crtež 7

4. Nađi opšti član niza na crtežu 8.



crtež 8

5. U dijelu sportske hale, stolice treba rasporediti u redove tako da prvi red ima 3 stolice, a svaki sljedeći red ima 3 stolice više od prethodnog.
   a) Koliko će stolica biti u petom redu?
   b) Koliko će stolica biti u desetom redu?
   c) Napiši broj stolica u n-tom redu.

6. U prvom redu jedne od tribina na fudbalskom stadionu nalazi se 56 navijača. U drugom redu je 59 navijača, u trećem redu 62 navijača itd. Koliko je navijača u desetom redu?

7. Učenici sprovode kampanju sadnje cvijeća u školskom dvorištu. Prvog dana su posadili 8 cvjetova. Svakog narednog dana sade 5 cvjetova više nego prethodnog dana.
   a) Koliko cvjetova će posaditi trećeg, četvrtog i petog dana?
   b) Koliko cvjetova će posaditi n-tog dana?
   c) Koliko će cvjetova ukupno biti zasađeno poslije 15 dana?
   č) Ako se akcija nastavi, kojeg dana će biti zasađena 83 cvijeta?

8. Jedan ledeni brijeg na Sjevernom polu bio je visok 105 m. Zbog topljenja leda, ledeni brijeg gubi po 3 metra svakog mjeseca.
   a) Koliko će brijeg biti visok poslije 10 mjeseci?
   b) Poslije koliko mjeseci će se ledeni brijeg potpuno otopiti?

9. a) Pronađi pravilo za sljedećeg člana niza oblika na crtežu 9 i odredi ukupan broj krugova u sljedećem obliku u nizu.



crtež 9

b) Nacrtaj i dopuni tabelu:

broj crvenih krugova					
broj plavih krugova					

c) Koliko plavih krugova ima član niza koji ima 10 crvenih krugova?

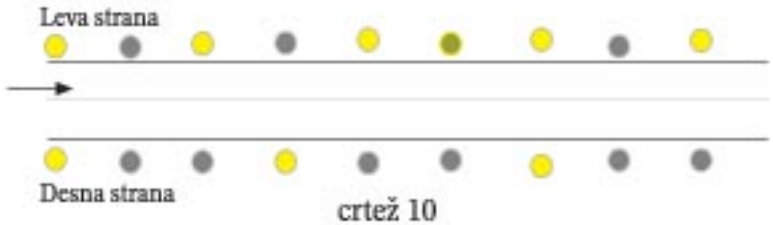
č) Koliko krugova ukupno ima pedeseti član?

10. U jednoj ulici se uličnе svjetiljke ne pale svake noći. (crtež 10) One koje su upaljene, pale se po posebnim pravilima za lijevu i desnu stranu ulice.

a) Pronađi pravilo prema kojem se pali svaka sljedeća svjetiljka na lijevoj strani i svaka sljedeća svjetiljka na desnoj strani ulice.

b) Da li je svjetiljka na poziciji 35 sa lijeve strane uključena?

c) Na kojim pozicijama su svjetiljke istovremeno upaljene sa obje strane? Pronađi opšte pravilo prema kojem se uključuju istovremeno.

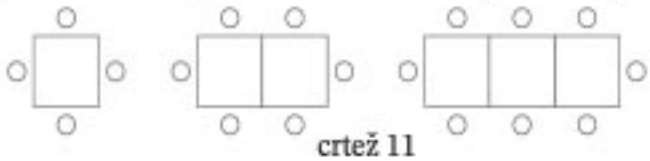


crtež 10

11. Oko stola se mogu postaviti 4 stolice. Crtež 11 prikazuje kako se stolovi mogu spojiti da bi se smjestilo više ljudi.

a) Koliko ljudi može da sjedi za 15 spojenih stolova?

b) Koliko stolova je potrebno da bi se smjestilo 40 ljudi zajedno?



crtež 11

13. FUNKCIJA

Definicija funkcije

Aktivnost

Sa relacijama R_1, R_2 i R_3 iz skupa učenika A = {Maja, Tino, Enis, Ava} u skupu zemalja B = {Italija, Španija, Grčka, Turska} određeno je koji je učenik u kojoj zemlji boravio. One su predstavljene pomoću grafika na crtežu 1.

а) 

Relacija R_1

б) 

Relacija R_2

c) 

Relacija R_3

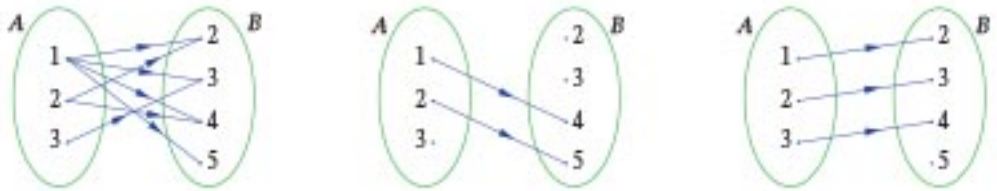
crtež 1

Prema grafiku relacije:
a) R_1 utvrdi da li je neki učenik posjetio više od jedne zemlje,
b) R_2 utvrdi da li postoji učenik koji nije posjetio nijednu zemlju,
c) R_3 utvrdi da li je svaki od učenika posjetio bilo koju zemlju.

Relacija iz skupa A u skupu B kojom je, prema nekom pravilu, svaki element $x \in A$ povezan sa tačno jednim elementom $y \in B$ naziva se **funkcija** iz skupa A u skupu B.
Skup A naziva se **domen**, a skup B **kodomen** funkcije.
Pišemo $f: A \to B$ i čitamo f je funkcija od A do B.

Primjer 1

Od skupa A = {1, 2, 3} u skupu B = {2, 3, 4, 5} date su relacije:
R_1: „ ... je djelilac ... “ R_2: „ ... je 3 manji od ... “, R_3: „... je za 1 manji od ...“.
One su predstavljene grafikom na crtežu 2. Koja od ovih relacija je funkcija?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3
crtež 2

Sa relacijom R_1, postoji element u skupu A (element 1) koji je povezan sa dva različita elementa u skupu B (postoji element iz kojeg izlaze dvije strelice)
Sa relacijom R_2, postoji element u skupu A (element 3) koji nije povezan ni sa jednim elementom skupa B (postoji element iz kojeg ne izlazi strelica).
Sa relacijom R_3, svaki element skupa A je povezan sa tačno jednim elementom skupa B (tačno jedna strelica izlazi iz svakog elementa). Zato je relacija R_3 funkcija iz skupa A u skupu B.

Zadatak 1

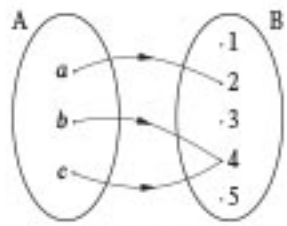
Neka su dati skupovi $M = \{1, 3, 5\}$ i $N = \{2, 4, 6\}$. Predstavi grafom relaciju između elemenata skupova M i N datu sa:
a) „ ... je 2 puta manji od ... “, b) „ ... je prethodnik ... “, c) „ ... je djelilac ... “.
Koja od relacija je funkcija? Objasni odgovor.

Neka je data funkcija $f: A \to B$. Ako je elementu $x \in A$ pridružen element $y \in B$, tada za x kažemo da je **original**, a za y kažemo da je **slika** od x. U tom slučaju zapisujemo $y = f(x)$.

Simbol x, kojim označavamo bilo koji element iz skupa A, naziva se nezavisna **promjenljiva**, a y ili $f(x)$ se naziva **zavisna promjenljiva** ili **vrijednost funkcije** koja odgovara x.

Primjer 2

Za funkciju $f: A \to B$ na slici 3, pronađi:
a) original elementa 2 skupa B,
b) sliku elementa b skupa A.



crtež 3

a) Original elementa 2 iz B je element a iz A.
b) Slika elementa b iz A je element 4 iz B i pišemo $f(b) = 4$.

Neka je $A = \{2, 4\}$ i $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Od skupa A do skupa B, funkcija f se određuje pravilom „... je prethodnik ...". Način povezivanja funkcije f: A → B može se zapisati **formulom**

$f(x) = x + 1$ ili $y = x + 1$, gdje je $x \in A$.

Prema formuli, možemo izračunati vrijednosti funkcije koje odgovaraju vrijednostima nezavisne promjenljive:

za $x = 2$ dobijamo $f(2) = 2 + 1 = 3$, za $x = 4$ dobijamo $f(4) = 4 + 1 = 5$.

Vrijednosti nezavisne promjenljive x i odgovarajuće vrijednosti funkcije $f(x)$ mogu se organizovati u tabeli.

x	2	4
$f(x)$	3	5

U prvom redu zapisujemo sve vrijednosti nezavisne promjenljive x, a u drugom redu odgovarajuće vrijednosti funkcije $f(x)$.

Skeniraj kod i istraži funkcije.

Primjer 3

Data je funkcija $f(x) = 3x - 1$.
a) Nacrtaj i popuni tabelu. b) Pronađi domen i kodomen funkcije.

x	5		9	
$f(x)$		20		32

a) Vrijednost funkcije nalazimo tako što je unosimo u formulu funkcije:
za $x = 5$ dobijamo $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$,
za $x = 9$ dobijamo $f(9) = 3 \cdot 9 - 1 = 26$.

Vrijednost nezavisne promjenljive, za datu vrijednost zavisne promjenljive, nalazimo zamjenom u formuli funkcije:

$20 = 3x - 1$, $21 = 3x$, $x = 7$

$32 = 3x - 1$, $33 = 3x$, $x = 11$.

Dobijamo tabelu:

x	5	7	9	11
$f(x)$	14	20	26	32

b) Iz tabele vidimo da je domen skup $\{5, 7, 9, 11\}$.

Kodomen je bilo koji skup koji sadrži vrijednosti 14, 20, 26 i 32.

Zadatak 2

Data je funkcija $f(x) = 2(x - 1)$.

a) Nacrtaj i popuni tabelu. b) Nađi domen i kodomen funkcije.

x			14	
$f(x)$	12	10		30

Funkcije u realnim situacijama

Funkcije imaju široku primjenu u prirodnim naukama, tehničkim naukama i svakodnevnom životu. One nam omogućavaju da razumijemo situacije i predvidimo promjene koje su rezultat međusobne zavisnosti veličina.

Primjer 4

U jednoj laboratoriji, biolog prati rast kolonije bakterija i bilježi rezultate u tabelu.

Na početku praćenja bilo je 9000 bakterija.

a) Napiši funkciju (matematički model) kojom ćeš izraziti broj bakterija y u zavisnosti od broja proteklih dana x.

b) Koliko će bakterija biti poslije sedam dana?

dan	prvi	prvi	drugi	drugi
vrijeme mjerenja	10:00	22:00	10:00	22:00
broj bakterija	9000	15000	21000	27000

a) Iz tabele zaključujemo da se u roku od 24 sata stvori 12.000 novih bakterija, jer je

$21000 - 9000 = 12000$ i $27000 - 15000 = 12000$.

Tražena funkcija je $y = 12000x + 9000$.

b) Poslije sedam dana bit će $y = 12000 \cdot 7 + 9000 = 93000$ bakterija.

Zadatak 3

U jednom rezervatu za ptice, istraživači i volonteri su do sada prstenovali 3500 ptica.
Planiraju da nastave da prstenuju 300 novih ptica svakog mjeseca.

a) Napiši funkciju kojom ćeš izraziti broj prstenovanih ptica y u zavisnosti od broja mjeseci koji su prošli x.

b) Koliko će prstenovanih ptica rezervat imati poslije 1 godine?

Primjer 5

Jovanov automobil troši 0,08 l goriva na svaki pređeni kilometar.

a) Napiši funkciju koja izražava potrošeno gorivo y (u litrima) u zavisnosti od pređenog puta x (u kilometrima).

b) Napiši funkciju kojom ćeš izraziti potrošeno gorivo y (u litrima) u zavisnosti od pređenog puta x (u kilometrima), ako je poznato da je tokom putovanja Jovan potrošio još 1,4 l goriva u mirovanju vozila.

c) Koliko je litara goriva Jovan potrošio ako je dužina puta 620 km?

a) Tražena funkcija je $y = 0{,}08x$. b) Funkcija je $y = 0{,}08x + 1{,}4$.

c) Jovan je potrošio $y = 0{,}08 \cdot 620 + 1{,}4 = 51\ l$.

Zadatak 4

Zavisnost mase neke supstance od njene zapremine data je formulom $m = \rho V$, gdje je ρ gustina supstance. Gustina mlijeka je 1,03 kg/l. Kolika je masa:

a) mlijeka upakovanog u posudu zapremine 0,5 l,

b) flaše sa 1 l mlijeka, ako flaša ima masu od 0,1 kg?

Primjer 6

Jedna mala kompanija koja proizvodi keramičke šolje želi da utvrdi koliki će biti njihov ukupni profit, u zavisnosti od broja proizvedenih i prodatih šolja. Fiksni troškovi kompanije (struja, zakupnina, prevoz) iznose 12000 denara mjesečno. Za materijal i radnu snagu troši se 80 denara za svaku šolju.
Prodajna cijena jedne šolje je 150 denara.

a) Napiši funkciju kojom ćeš izraziti profit y u zavisnosti od broja proizvedenih šolja x.

b) Izračunaj profit firme ako kompanija proda 300 šolja.

c) Koliko šolja kompanija mora da proda da ne bi imala ni dobitke ni gubitke?

č) Objasni kako ova funkcija može pomoći firmama pri planiranju proizvodnje i prodaje.

a) Prihod firme je $150x$ (cijena količine). Ukupni troškovi su $12\,000 + 80x$.
Dobitak je razlika između prihoda i troškova:

$$y = 150x - (12000 + 80x) = 70x - 12000.$$

b) Ako kompanija proda 300 šolja, dobitak će biti
$y = 70 \cdot 300 - 12000 = 21000 - 12000 = 9000$ denara.

c) Nema ni dobitka ni gubitka kada je
$y = 0, \quad 0 = 70x - 12000, \quad x = 12000 : 70 \approx 171{,}4.$

Znači, kompanija mora da proda najmanje 172 šolje kako ne bi bila u gubitku.

č) Ova funkcija omogućava vlasnicima: da predvide dobitak ili gubitak za bilo koju količinu u proizvodnji, da planiraju cijenu jedne šolje, kao i da odluče da li vrijedi da se poveća proizvodnja ili da se smanje troškovi.

Zadatak 5

Jedna mala kompanija koja proizvodi štampane pamučne majice želi da utvrdi kolika će biti njihova ukupna zarada, u zavisnosti od broja proizvedenih i prodatih majica.
Fiksni troškovi kompanije (zakup lokala, struja, internet, održavanje mašina) iznose 15000 denara mjesečno. Za svaku majicu, 120 denara se troši na materijal, boju i radnu snagu. Prodajna cijena jedne majice je 260 denara.

a) Napiši funkciju kojom ćeš izraziti dobitak y u zavisnosti od broja prodatih majica x.
b) Izračunaj dobitak kompanije ako prodaju 250 majica mjesečno.
c) Koliko majica treba da proda kompanija da ne bi imala ni dobitak ni gubitak?
č) Objasni kako ovaj matematički model može pomoći kompaniji u planiranju proizvodnje i prodaje.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Između elemenata skupova A i B data je relacija: a) „ ... je 5 manji od ... “, b) „ ... je 3 puta manji od ... “.
   Koja od ovih relacija je funkcija?

2. U jednom domaćinstvu, potrošnja vode zavisi od broja ljudi koji žive u kući. Poznato je da svaka osoba potroši prosječno 60 litara vode dnevno..
   a) Nacrtaj i popuni tabelu.

broj ljudi	1	2	4	6
potrošnja vode (l)				

   b) Napiši pravilo koje izražava vezu između broja ljudi i potrošnje vode.
   c) Da li je ova veza funkcija?
   č) Šta bi predstavljali domen i kodomen u ovom slučaju?

3. U jednom malom istraživanju, učenici su bilježili koliko čaša vode piju u toku dana:

učenik	Ana	Bojan	Selma	Arben
broj popijenih čaša vode	6	8	5	8

a) Da li ova veza između učenika i broja čaša popijene vode određuje funkciju?
b) Ako si odgovorio/la sa da, napiši domen i kodomen.
Ako je odgovor ne, objasni zašto veza ne određuje funkciju.

4. Nacrtaj i popuni tabele, ako je $f(x) = 2x + 5$ i $g(x) = 3(x - 2)$.
Koristeći datu funkciju:

x	3	7		
$f(x)$			25	35

x		8		12
$g(x)$	9		24	

5. Mila je ponijela 15000 denara sa sobom na odmor i odlučila je da će svakodnevno trošiti 1200 denara. Napiši funkciju kojom ćeš izraziti količinu novca y (u denarima) u zavisnosti od broja dana x.

6. Prodavac breskvi treba da plati 600 denara za dnevnu zakupninu tezge na pijaci. Breskve će prodavati po cijeni od 90 denara po kilogramu.
a) Napiši funkciju kojom ćeš izraziti zavisnost količine novca y (u denarima) od količine prodatih breskvi x (u kilogramima)?
b) Koliko će prodavac zaraditi ako proda 150 kilograma breskvi?

7. Jedan brod je do sada prešao 250000 km. Sutra kreće na krstarenje na kojem će prelaziti 120 km dnevno.
a) Napiši funkciju kojom ćeš izraziti zavisnost broja pređenih kilometara broda y od broja dana x provedenih na putovanju?
b) Koliko će kilometara brod ukupno preći nakon 10 dana?

8. U prodavnici se odobrava popust od 10% za svaku kupovinu preko 1000 denara.
a) Napiši funkciju koja određuje ukupnu cijenu y od iznosa računa x.
b) Objasni kako ova funkcija pomaže trgovcima u planiranju cjenovne politike.

9. Mala pekara koja proizvodi mafine želi da utvrdi koliki će biti njihov ukupni profit, u zavisnosti od broja proizvedenih i prodatih mafina.
Fiksni troškovi pekare (struja, zakupnina, plate, voda) iznose 9000 denara mjesečno. Svaki mafin košta 30 denara za sastojke i radnu snagu.
Prodajna cijena jednog mafina je 70 denara.
a) Pronađi matematički model (funkciju) koja određuje zavisnost profita y od broja prodatih mafina x.
b) Izračunaj profit pekare ako proda 400 mafina.
c) Koliko mafina pekara treba da proda da bi dostigla tačku rentabilnosti?
č) Objasni kako ova funkcija može pomoći pekari u planiranju proizvodnje i prodaje.

14. LINEARNA FUNKCIJA. GRAFIK LINEARNE FUNKCIJE

Linearna funkcija

Aktivnost

Bioskopska karta košta 150 denara. Za koliko će se povećati iznos koji moramo da platimo ako kupimo još 1 kartu, još 2 karte i tako dalje? Da li se iznos uvijek povećava za isti iznos? Koliki je taj iznos?

Funkcija oblika $y = kx + n$ (ili $f(x) = kx + n$) gdje su k i n racionalni brojevi naziva se **linearna funkcija.**
Broj k naziva se **koeficijent pravca**, a broj n je **slobodni član** linearne funkcije.

Funkcije $y = 7x$, $y = 2x - 3$, $y = 1 - 5x$, $y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = -\frac{3}{4}x + 2$, $y = x + \frac{3}{7}$ su linearne funkcije.

Primjer 1

Taksi kompanija naplaćuje 50 denara pri polasku i 20 denara za svaki pređeni kilometar.
Tabela prikazuje cijenu koju moramo da platimo za svaki pređeni kilometar.

Rastojanje(km)	0	1	2	3
cijena (denari)	50	$20 \cdot 1 + 50 = 70$	$20 \cdot 2 + 50 = 90$	$20 \cdot 3 + 50 = 110$

Primjećujemo da za svaki pređeni kilometar plaćamo još 20 denara.
Zavisnost između rastojanja x i cijene koju moramo da platimo y određena je linearnom funkcijom $y = 20x + 50$.
Koeficijent pravca je $k = 20$ i pokazuje koliko se y povećava ako se x poveća za 1.
Slobodni član je $n = 50$ i pokazuje početnu vrijednost, odnosno vrijednost y kada je $x = 0$.

Zadatak 1

Koji je koeficijent pravca i koji je slobodni član funkcije:
a) $y = 2x + 3$, b) $y = 5x$, c) $y = 4$, č) $y = x - 2$?

Zadatak 2

Napiši formulu linearne funkcije sa koeficijentom pravca i slobodnim članom:
a) $k = 3$, $n = -1$, b) $k = 0, n = -2$, c) $k = -1, n = 0$, č) $k = 0, n = 0$.

Grafik linearne funkcije

Primjer 2

Nacrtaj grafik linearne funkcije $y = x + 4$.

Prema formuli linearne funkcije

$$y = x + 4$$

izračunavamo vrijednost y za nekoliko vrijednosti x. Na primjer:

za $x = -3$, $y = -3 + 4 = 1$; za $x = -2$, $y = -2 + 4 = 2$; za $x = -1$, $y = -1 + 4 = 3$;

za $x = 0$, $y = 0 + 4 = 4$; za $x = 1$, $y = 1 + 4 = 5$; za $x = 2$, $y = 2 + 4 = 6$.

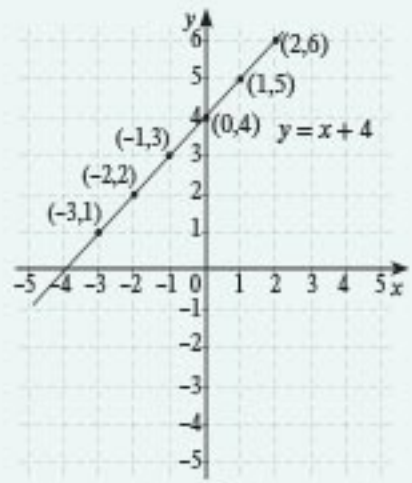
Dobijene vrijednosti možemo zapisati u tabelu:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	3	4	5	6

Uređeni parovi: $(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(-1, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 5)$ i $(2, 6)$ zadovoljavaju formulu linearne funkcije $y = x + 4$. Za njih kažemo da su to tačke **grafika linearne funkcije**.

Dobijeni uređeni parovi mogu se predstaviti kao tačke u koordinatnom sistemu, tako da je prva koordinata ucrtana na x-osi, a druga koordinata na y-osi.

Povezivanjem ovih tačaka dobijamo **pravu** koja vizuelno predstavlja grafik linearne funkcije $y = x + 4$ (crtež 1).



crtež 1

Primjer 3

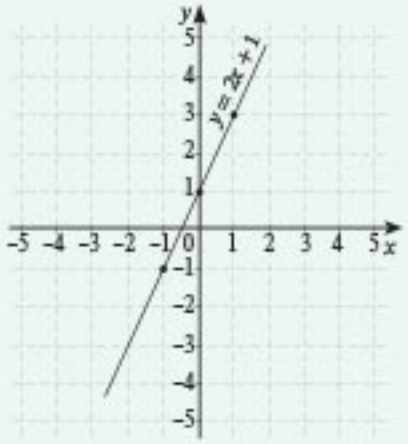
Nacrtaj grafik linearne funkcije $y = 2x + 1$.

Grafik linearne funkcije je prava, tako da su dvije tačke dovoljne da se ona nacrta (crtež 2).
Sastavljamo tabelu u koju unosimo dvije proizvoljne vrijednosti za x.
Zatim, koristeći formulu linearne funkcije $y = 2x + 1$, izračunavamo odgovarajuće vrijednosti za y:

za $x = -1$, $2 \cdot (-1) + 1 = -1$; i za $x = 0$, $2 \cdot 0 + 1 = 1$.

x	-1	0
y	-1	1

Tako smo dobili dvije tačke na grafiku linearne funkcije: $(-1, -1)$ i $(0, 1)$. Predstavit ćemo tačke u koordinatnom sistemu, povući pravu koja prolazi kroz njih i na pravoj napisati formulu. Dobijena prava je grafik linearne funkcije $y = 2x + 1$.



crtež 2

Zadatak 3

Nacrtaj grafik funkcije:
a) $y = -3x + 2$, b) $y = x - 2$.

Skeniraj kod i nacrtaj funkcije.

Linearne funkcije sa istim koeficijentom pravca. Linearne funkcije sa istim slobodnim članom

Aktivnost

Biljka A je visoka 5 cm, a biljka B je visoka 3 cm. Obje biljke rastu istom brzinom od 2 cm sedmično.

a) Izračunaj visinu biljaka u prvih 5 sedmica.

b) Kako se visina biljaka mijenja svake sedmice?

c) Šta je isto kod biljaka?

Primjer 4

Temperatura nakon izlaska sunca u Skoplju bila je 3 °C, a u Bitolju -1 °C.
U oba grada temperatura raste za 2 °C svakog sata.

a) Za svaki grad, izrazi zavisnost između vremena i temperature linearnom funkcijom.
Objasni šta uočavaš.

b) Nacrtaj grafike dvije linearne funkcije u istom koordinatnom sistemu.
Objasni šta uočavaš.

a) Za svaki grad označavamo sa x sate nakon izlaska sunca, a sa y odgovarajuće temperature u gradu. Tabela daje vrijednosti temperatura u dva grada, tokom nekoliko sati nakon izlaska sunca.

Broj sati poslije izlaska sunca (x)	temperatura u Skoplju (y_1)	temperatura u Bitolju (y_2)
0	3 °C	−1 °C
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$ °C	$2 \cdot 1 - 1 = 1$ °C
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$ °C	$2 \cdot 2 - 1 = 3$ °C
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$ °C	$2 \cdot 3 - 1 = 5$ °C

Zavisnost između vremena x i temperature y_1, odnosno y_2, u svakom od gradova određena je linearnim funkcijama:

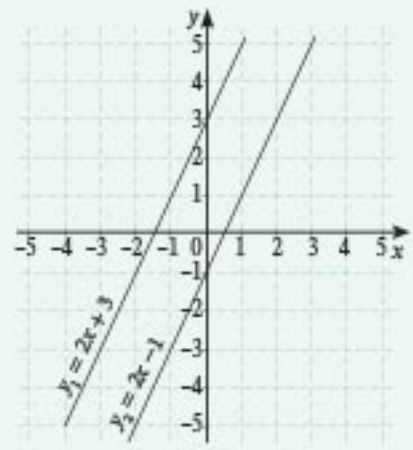
$y_1 = 2x + 3$, za Skoplje i $y_2 = 2x - 1$, za Bitolj.

Primjećujemo da obje funkcije imaju **isti koeficijent pravca** jednak 2.

b) Na crtežu 3, nacrtani su grafici linearnih funkcija

$y_1 = 2x + 3$ i $y_2 = 2x - 1$.

Primjećujemo da su grafici linearnih funkcija **paralelne prave**.



crtež 3

Grafici linearnih funkcija sa **istim koeficijentom** pravca su **paralelne prave**.

Zadatak 4

U istom koordinatnom sistemu nacrtaj grafike linearnih funkcija
$y_1 = -3x + 1$ i $y_1 = -3x - 3$.

a) Koji je uzajamni položaj grafika linearnih funkcija?

b) Uporedi koeficijente pravca linearnih funkcija.

Aktivnost

Marko i Adora štede na različite načine. Marko ima 100 denara i svakog mjeseca štedi po 300 denara. Adora ima 100 denara i svakog mjeseca štedi po 500 denara.
a) Kako se mijenja iznos Markove i Adorine uštеđevine svakog mjeseca?
b) Šta je isto kod oboje?

Primjer 5

Ana i Bekim imaju po 3 naljepnice. Ana svakodnevno dodaje 2 nove naljepnice u svoju kolekciju. Bekim svakodnevno poklanja jednu naljepnicu svom drugu.
a) Za svako dijete izrazi linearnom funkcijom zavisnost između broja proteklih dana i broja naljepnica. Objasni šta primjećuješ.
b) Nacrtaj grafike dvije linearne funkcije u istom koordinatnom sistemu. Objasni šta primjećuješ.

a) Anin broj naljepnica povećava se za jednu svakog dana, dok se Bekimov smanjuje za dvije. Neka je x broj proteklih dana, a y broj naljepnica. U tabeli je dat broj naljepnica za oboje djece, u periodu od nekoliko dana.

Broj proteklih dana (x)	Anin broj naljepnica (y_1)	Broj Bekimovih naljepnica (y_2)
0	3	3
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$-1 \cdot 1 + 3 = 2$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$-1 \cdot 2 + 3 = 1$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$	$-1 \cdot 3 + 3 = 0$

Zavisnost između broja proteklih dana x i broja naljepnica y_1, odnosno y_2 određena je linearnim funkcijama:

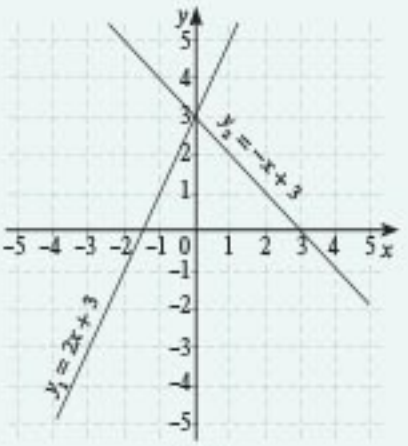
Ana $y_1 = 2x + 3$, i Bekim $y_2 = -x + 3$.

Primjećujemo da obje funkcije imaju **isti slobodni član** jednak 3.

b) Na crtežu 4, grafici linearnih funkcija nacrtani su u istom koordinatnom sistemu.

$y_1 = 2x + 3$ i $y_2 = -x + 3$.

Primjećujemo da grafici linearnih funkcija sijeku y-osu u tački (0,3).



crtež 4

Grafici linearnih funkcija sa istim slobodnim članom n su prave koje sijeku y-osu u tački $(0, n)$.

Zadatak 5

U istom koordinatnom sistemu nacrtaj grafike linearnih funkcija:
$y_1 = -3x - 1$ i $y_2 = x - 1$.

a) U kojoj tački se grafici linearnih funkcija sijeku?
b) Uporedi slobodne članove linearnih funkcija.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koliki je koeficijent, a koliki slobodni član funkcije:
   a) $y = 3x + 4$, b) $y = x$, c) $y = -5$, č) $y = -x - 2$?
2. Napiši formulu linearne funkcije sa koeficijentom i slobodnim članom:
   a) $k = -3$, $n = -4$, b) $k = 0$, $n = 3$, c) $k = 6$, $n = 0$, č) $k = 2$, $n = -5$.
3. Nacrtaj grafik linearne funkcije: a) $y = -x + 3$, b) $y = 3x - 2$, c) $y = 2x$.
4. Poredaj linearne funkcije u grupe međusobno paralelnih pravih:
   $y = 2x + 15$, $y = 5x - 7$, $y = x + 3$, $y = -7x - 2$, $y = 2x$, $y = 5x$,
   $y = -7x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -7x$, $y = x$, $y = 5x - 1$, $y = 2x - 7$.
5. Napiši linearnu funkciju čiji je grafik prava paralelna sa pravom $y = 5x - 6$ i siječe y – osu u tački $(0, 7)$.
6. Napiši linearnu funkciju čiji je grafik prava paralelna sa pravom $y = 4x + 3$ i siječe pravu $y = x + 1$ na y – osi.
7. Za koju vrijednost a, grafici funkcija $y = (2a + 3)x + 1$ i $y = (a - 5)x + 2$ su paralelne prave?
8. Za koju vrijednost a, grafik funkcije $y = (a + 2)x - 2a + 3$ siječe y – osu u tački $(0,5)$?
9. Matej počinje da vozi bicikl u 8 sati, a Andrej u 9 sati.
   Obojica voze konstantnom brzinom od 15 km/h.
   a) Napiši formule linearnih funkcija koje opisuju kretanje Mateja i Andreja,
   b) Nacrtaj njihove grafike. Koji je njihov međusobni položaj?
10. Duško i David su dobili po 5000 denara za rođendan. Duško je odlučio da uštedi svoj novac i da svaki dan dodaje 50 denara, dok je David svaki dan trošio 100 denara od svog novca.
    a) Napiši linearnu funkciju koja izražava novčani iznos y (u denarima) kao funkciju vremena x (u danima).
    b) Koje su koordinate tačke presjeka grafika obje funkcije?

Istraživanje

Razmisli i objasni kako možeš grafički da prikažeš linearnu funkciju $y = 3x - 1$, u item koordinatnom sistemu u kojem je nacrtan grafik linearne funkcije $y = 3x + 2$, bez pravljenja tabele vrijednosti.
Uopšti zaključak za funkciju oblika $y = kx + n$.

15. TOK LINEARNE FUNKCIJE

Termin „tok“ se prirodno povezuje sa tokom vremena, tokom rijeke itd. U tom smislu, rijeka ima svoj tok u kojem njen nivo vode može da raste, opada ili ostane konstantan. Otkrit ćemo od čega zavisi tok jedne linearne funkcije.

Rastuća linearna funkcija

Aktivnost

Afrim vozi bicikl do vrha Vodna. Da li će se u narednih nekoliko minuta promijeniti nadmorska visina na kojoj se nalazi? Da li će se povećati ili smanjiti?

Primjer 1

Iva je odlučila da štedi od svog džeparca u visini od 2500 denara, tako što će svakodnevno dodavati po 75 denara.

a) Zapiši linearnu funkciju zavisnosti ušteđenog iznosa y (u denarima) od vremena štednje x (u danima).

b) Koristi tabelu da bi predstavio ovu zavisnost za prvih 5 dana.

c) Koji je znak koeficijenta pravca linearne funkcije?

č) Kako se vrijednost promjenljive y mijenja sa povećanjem vrijednosti promjenljive x?

a) Ivina početna ušteđevina je 2500 denara. Svakog dana ona dodaje 75 denara, tako da će poslije x dana imati $2500 + 75x$. Dakle, linearna funkcija $y = 75x + 2500$ je određena.

b)

vrijeme štednje x (u denarima)	1	2	3	4	5
Ušteđeni iznos (u denarima)	2575	2650	2725	2800	2875

c) Koeficijent nagiba je $k = 75 > 0$. Znak koeficijenta nagiba je pozitivan.

č) Iz tabele možemo vidjeti da sa povećanjem vrijednosti promjenljive x vrijednost promjenljive y raste. Na primjer, od $3 < 5$ imamo da je $2725 < 2800$.

Kažemo da je data linearna funkcija **rastuća funkcija**.

Primjer 2

U istom koordinatnom sistemu, nacrtajte rastuće linearne funkcije $y = x + 3$ i $y = 2x - 1$.

a) Koja linearna funkcija brže raste?

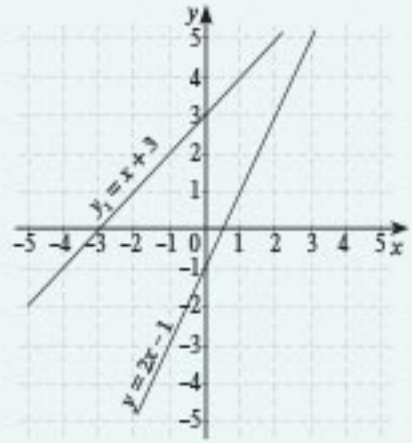
b) Uporedi njihove koeficijente pravca? Šta se može zaključiti?

Grafici linearnih funkcija prikazani su na crtežu 1.

a) Iz grafika vidimo da je grafik linearne funkcije $y = 2x - 1$ strmiji od grafika linearne funkcije $y = x + 3$, pa linearna funkcija $y = 2x - 1$ **raste brže** od linearne funkcije $y = x + 3$..

b) Linearna funkcija $y = 2x - 1$ $(k = 2)$ ima **veći koeficijent pravca** od linearne funkcije $y = x + 3$ $(k = 1)$.

x	0	1
$y = x + 3$	3	4
$y = 2x - 1$	-1	1



crtež 1

Između dvije rastuće linearne funkcije, linearna funkcija sa većim koeficijentom pravca raste brže.

U svakodnevnom životu postoje situacije u kojima, postavljanjem funkcije, možemo predvidjeti tok događaja i planirati aktivnosti koje nam više odgovaraju.

Primjer 3

Kompanija mobilne telefonije 1 nudi: 1 denar po minuti razgovora i mjesečnu naknadu od 200 denara.
Kompanija 2 nudi 2 denara po minuti razgovora i mjesečnu naknadu od 100 denara.

a) Za obje kompanije, napiši linearnu funkciju zavisnosti cijene y (u denarima) od trajanja poziva x (u minutima).

b) Nacrtaj grafike dvije linearne funkcije u istom koordinatnom sistemu.

c) Objasni koja je kompanija povoljnija u zavisnosti od dužine poziva tokom mjeseca?

a) Linearna funkcija za kompaniju 1 je $y = x + 200$.
Linearna funkcija za kompaniju 2 je $y = 2x + 100$,

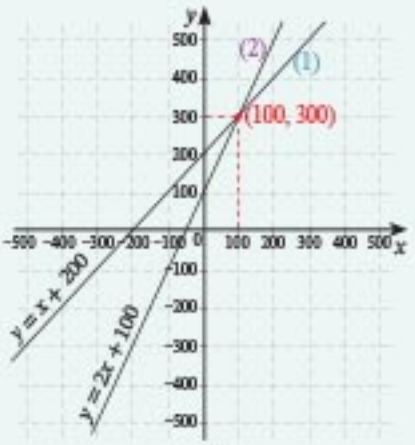
b) Grafici dvije linearne funkcije u istom koordinatnom sistemu dati su na crtežu 2.

kompanija 1

trajanje razgovora (x u minutima)	0	50	100
cijena (y u denarima)	200	250	300

kompanija 2

trajanje razgovora (x u minutima)	0	50	100
cijena (y u denarima)	100	200	300



crtež 2

c) Prave se sijeku u tački (100, 300).
Koordinata $x = 100$ je broj minuta.
Koordinata $y = 300$ je mjesečna cijena poziva.
Vrijednosti u tački presjeka znače da ćemo za 100 minuta razgovora platiti isto (300 denara) kod obje kompanije.
Da bismo utvrdili koja je ponuda povoljnija, ispitat ćemo tok dvije funkcije u odnosu na tačku presjeka. Iz grafika vidimo da:

- ako razgovaramo duže od 100 minuta, odgovarat će nam ponuda čija cijena sporije raste, a to je kompanija 1.
- ako razgovaramo manje od 100 minuta, odgovarat će nam ponuda čija cijena brže raste, a to je kompanija 2.

Zadatak 1

Na pijaci 1, plaća se dnevna zakupnina za tezgu 400 denara, a cijena jabuka je 50 denara po kilogramu.
Na pijaci 2, dnevna zakupnina za tezgu iznosi 500 denara, a cijena jabuka je 70 denara po kilogramu.
a) Objasni na kojoj pijaci je prodavcu isplativije da iznajmi tezgu u zavisnosti od količine prodatih jabuka.
b) Na kojoj pijaci će prodavac zaraditi više ako proda 400 kg jabuka, a na kojoj ako proda 800 kg jabuka?

Opadajuća linearna funkcija

Aktivnost

Teona ima 10 flašica soka. Svakog dana daje po jednu flašicu svojoj drugarici Esmi. Da li će se broj Teoninih flašica soka povećati ili smanjiti u narednih nekoliko dana?

Primjer 4

Andrea ima 8500 denara na svom računu. Svakog dana potroši 500 denara sa računa.

a) Napiši linearnu funkciju zavisnosti iznosa novca na računu y (u denarima) od proteklog vremena x (u danima).

b) Koristi tabelu da bi predstavio/la ovu zavisnost za prvih 5 dana.

c) Koji je znak koeficijenta pravca linearne funkcije?

č) Kako se vrijednost promjenljive y mijenja sa povećanjem vrijednosti promjenljive x?

a) Iz datih uslova vidimo da se početni iznos od 8500 denara smanjuje za 500 denara svakog dana. Ovo definiše linearnu funkciju $y = -500x + 8500$.

b)

Vrijeme trošenja (x u denarima)	1	2	3	4	5
Iznos na računu (y u denarima)	8000	7500	7000	6500	6000

c) Koeficijent pravca je $k = -500 < 0$. Znak koeficijenta pravca je negativan.

č) Iz tabele možemo vidjeti da sa povećanjem vrijednosti promjenljive x, vrijednost promjenljive y opada. Na primjer, za $2 < 4$ imamo da je $7500 > 6500$.

Kažemo da je data linearna funkcija **opadajuća funkcija**.

Primjer 5

U istom koordinatnom sistemu, nacrtaj opadajuće linearne funkcije

$y = -x + 3$ i $y = -2x + 1$.

a) Koja linearna funkcija brže opada?

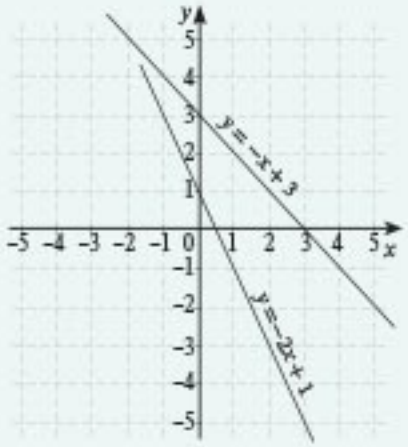
b) Uporedi njihove koeficijente pravca? Šta se može zaključiti?

Grafici linearnih funkcija prikazani su na crtežu 3.

a) Iz grafika vidimo da je grafik linearne funkcije $y = -2x + 1$ strmiji od grafika linearne funkcije $y = -x + 3$, pa linearna funkcija $y = -2x + 1$ **opada brže** od linearne funkcije $y = -x + 3$.

b) Linearna funkcija $y = -2x + 1$ $(k = -2)$ ima **manji koeficijent pravca** u odnosu na linearnu funkciju $y = -x + 3$ $(k = -1)$.

x	0	1
$y = -x + 3$	3	2
$y = -2x + 1$	1	-1



crtež 3

Između dvije opadajuće linearne funkcije, linearna funkcija sa manjim koeficijentom pravca opada brže.

Primjer 6

Istraživači su postavili termometre za mjerenje temperature morske vode i vazduha na 2 lokacije na obali. Termometar 1 prvo mjeri na površini mora i svakog sata se spušta po 5 metara. Termometar 2 se nalazi 2 metra ispod nivoa mora i istovremeno sa termometrom 1 počinje da se spušta 4 metra svakog sata.

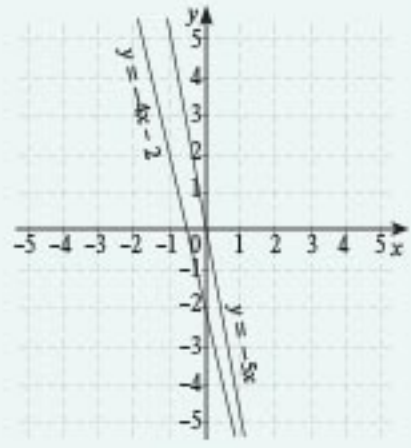
a) Napiši formule za zavisnost dubine na kojoj se termometar nalazi y (u metrima) od vremena spuštanja x (u satima) za oba termometra.

b) Nacrtaj grafike dvije funkcije u istom koordinatnom sistemu.

c) Koji od termometara će brže izmjeriti temperaturu na lokaciji koja se nalazi na -150 metara nadmorske visine?

a) Za termometar 1 imamo: $y = -5x$,
a za termometar 2 imamo: $y = -4x - 2$.

b)



crtež 4

c) Ako za termometar 1 imamo da je -150 metara nadmorske visine, imamo da je $y = -150$.
Zato u formuli $y = -5x$ zamjenjujemo $-150 = -5x$,
pa je $x = 30$ sati.
Za termometar 2 imamo: $y = -4x - 2$,
$-150 = -4x - 2$, $-148 = -4x$, $x = 37$ sati.
Termometar 1 će brže stići do lokacije koja je na -150 metara nadmorske visine.

Zadatak 2

Sa vrha brda, Mersiha se spušta žičarom, a Adem skijaškom stazom, kojom će preći za 1 km duži put od puta kojim prolazi žičara. Žičara se kreće brzinom od 15 km/h, a Adem skija brzinom od 25 km/h.

a) Napiši formule za zavisnost pređenog puta u (u kilometrima) od vremena x (u satima) za spuštanje Mersihe i Adema,

b) Nacrtaj grafike za obje funkcije u istom koordinatnom sistemu,

c) Koliku je udaljenost svako od njih prešao ako su poslije 10 minuta stigli do podnožja brda u isto vrijeme?

Ni rastuća ni opadajuća linearna funkcija

Aktivnost

Jedna kompanija je proizvela 300 proizvoda. Zbog defekta na mašinama, proizvodnja je zaustavljena. Da li će se broj proizvoda koje proizvodi kompanija povećati, smanjiti ili ostati isti (neće se ni povećati ni smanjiti)?

Primjer 7

U jednom frižideru temperatura je $-4°C$ tokom cijelog dana.

a) Napiši formulu za zavisnost temperature y u frižideru od broja sati x.

b) Koristi tabelu da bi predstavio/la ovu zavisnost za prva 3 sata.

c) Koliki je koeficijent pravca linearne funkcije?

č) Kako se vrijednost promjenljive y mijenja u zavisnosti od vrijednosti promjenljive x?

a) Temperatura je $-4°C$ i ne mijenja se tokom dana. Na ovaj način je određena linearna funkcija $y = -4$

b)

proteklo vrijeme (x u satima)	1	2	3
Temperatura (y)	-4 °C	-4 °C	-4 °C

c) Koeficijent pravca je $k = 0$.

č) Iz tabele možemo da vidimo da se promjenom vrijednosti promjenljive x vrijednost promjenljive y nije promijenila. Za datu linearnu funkciju kažemo da **nije ni rastuća ni opadajuća funkcija** (konstantna funkcija).

Linearna funkcija $y = kx + n$ e:

- rastuća, ako je $k > 0$,
- opadajuća, ako je $k < 0$,
- ni rastuća ni opadajuća, ako je $k = 0$.

Skeniraj kod i razgledaj funkcije.

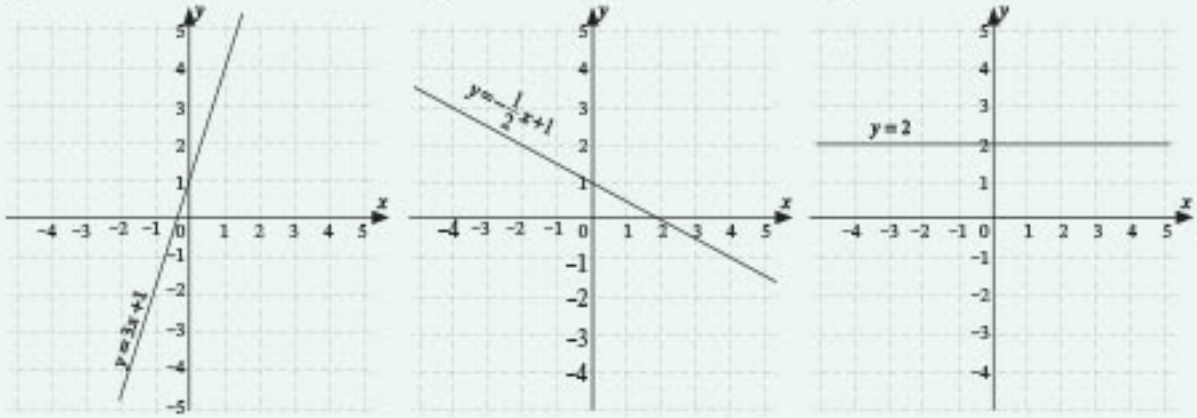
Primjer 8

Na crtežu 5 prikazan je grafik linearne funkcije: a) $y = 3x + 1$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, c) $y = 2$. Za svaku od linearnih funkcija, odredi da li je rastuća ili opadajuća ili nije ni rastuća ni opadajuća.

Iz grafika linearne funkcije $y = 3x + 1$ primjećujemo da se povećavanjem vrijednosti promjenljive x povećavaju vrijednosti promjenljive y. Zato je linearna funkcija rastuća.

U linearnoj funkciji $y = -\frac{1}{2}x + 1$, povećavanjem vrijednosti promjenljive x smanjuju se vrijednosti promjenljive y. Prema tome, funkcija je opadajuća. Linearna funkcija $y = 2$ nije ni rastuća ni opadajuća.

a) b) c)



crtež 5

Zadatak 3

Date su linearne funkcije:

$y = -x + 1, y = 4x + 1, y = -3x, y = -2x + 3, y = 2x$ i $y = x + 2$.

a) Nacrtaj rastuće funkcije u jednom, a opadajuće funkcije u drugom koordinatnom sistemu.

b) Među rastućim linearnim funkcijama, odredi koja najbrže raste?

c) Među opadajućim linearnim funkcijama, odredi koja najbrže raste?

Zadatak 4

Date su linearne funkcije:

$y = -53x + 7$, $y = 8x + 19$, $y = -45$, $y = -50x + 23$, $y = 78x$, $y = x + 89$,
$y = -x + 95$, $y = 100x + 1$, $y = -325x$, $y = 25$, $y = x + 36$.

Napišite sve funkcije koje su:

a) rastuće. Koja najbrže raste? Zašto?

b) opadajuće. Koja najbrže opada? Zašto?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. U istom koordinatnom sistemu nacrtaj linearne funkcije:

   $y = x + 2, y = 5x - 3$ i $y = \frac{1}{4}x + 3$.

   a) Da li su funkcije rastuće ili opadajuće? b) Koja funkcija najbrže raste?

2. U istom koordinatnom sistemu, nacrtaj linearne funkcije: $y = -x + 1, y = -3x + 2$ i $y = -\frac{3}{4}x$.

   a) Da li funkcije rastu ili opadaju? b) Koja funkcija najbrže opada?

3. Date su linearne funkcije:

   $y = -3x + 5$, $y = 9x + 20$, $y = -75$, $y = -52x + 3$, $y = 87x$, $y = x + 9$,
   $y = -x + 94$, $y = 50x + 3$, $y = -758x$, $y = 285$, $y = x + 96$.

   Napiši sve funkcije koje su:

   a) rastuće. Koja od njih najbrže raste? b) opadajuće. Koja od njih najbrže opada?

4. Provjeri bez crtanja da li će funkcija biti rastuća ili opadajuća za:

   a) Ukupnu cijenu vožnje taksijem u zavisnosti od broja pređenih kilometara ako je početna cijena 50 denara, i 30 denara po svakom kilometru;

   b) Količinu vode u jednom bazenu u zavisnosti od vremena, ako u bazenu ima 8000 litara vode, a svakog sata se isprazni po 100 litara;

   c) Iznos koji će Azri ostati u zavisnosti od dana provedenih na odmoru, ako je ponijela 20 000 denara i planira da troši 1500 denara dnevno;

   č) Iznos telefonskog računa u zavisnosti od trajanja poziva ako kompanija naplaćuje 200 denara za pretplatu i 2 denara po minuti razgovora.

5. Temperatura u Ohridu u 6 h ujutro bila je −3 °C, a do podne je rasla za 2 °C svakog sata.

   a) Napiši linearnu funkciju koja izražava zavisnost temperature y (u Celzijusovim stepenima) od vremena x (u satima).

   b) Nacrtaj grafik linearne funkcije.

   c) Ispitaj da li je linearna funkcija rastuća ili opadajuća.

   č) Odredi kada će temperatura biti 0 °C.

6. Marko ima dvije ponude za posao u prodavnicama bicikala. U prvoj mu se nudi 1000 denara dnevno i 500 denara od svakog prodatog bicikla, a u drugoj 1500 denara dnevno i 200 denara od svakog prodatog bicikla.

   a) Napiši linearnu funkciju koja izražava zavisnost zarađenog iznosa novca y (u denarima) od vremena x (u danima).

   b) Objasni koja je ponuda povoljnija u zavisnosti od broja prodatih bicikala.

7. Rosa želi da zaposli prodavačicu u svojoj cvjećari. Dvoumi se da li da joj ponudi dnevnicu od 1200 denara i 40 denara od svakog prodatog buketa ili 1500 denara i 20 denara od svakog prodatog buketa. Posljednjeg mjeseca u cvjećari se prodavalo po 30 buketa dnevno.

   a) Za koliko prodatih buketa dnevno su obje ponude podjednako povoljne?

   b) Koja je ponuda povoljnija za Rosu ako prodaja ostane na 30 buketa dnevno?

8. Grad želi da podstakne upotrebu električnih trotineta za prevoz do posla. Postoje dvije mogućnosti za građane:
Mogućnost A: Kupovina sopstvenog električnog trotineta za 24000 denara, uz dodatni trošak za punjenje od 20 denara dnevno.
Mogućnost B: Iznajmljivanje trotineta preko aplikacije za 150 denara dnevno, bez drugih troškova.

a) Zapiši linearne funkcije koje određuju zavisnost ukupnih troškova C od broja dana korištenja x za obje mogućnosti.
b) Nacrtaj njihove grafike u istom koordinatnom sistemu.
c) Pronađi poslije koliko dana korištenja će troškovi za dvije opcije biti jednaki.
č) Objasni koja je opcija povoljnija za kraći, a koja za duži period i zašto.
ć) Predloži jednostavnu promjenu cijena ili uslova koja bi učinila opciju B pristupačnijom građanima.

Istraživanje

Bekim se penje uz tobogan prema funkciji y_1, a spušta prema funkciji y_2. (crtež 6).

a) Koliki je koeficijent pravca k_1 funkcije y_1?
b) Koliki je koeficijent pravca k_2 funkcije y_2?
c) Koje će stepenice za penjanje biti strmije: one postavljene prema funkciji $y = 2x + 5$ ili one postavljene prema funkciji $y = 3x + 4$?

č) Da li se dio tobogana za spuštanje može postaviti prema konstantnoj funkciji? Objasni odgovor.



crtež 6

16. ZAPISIVANJE LINEARNE FUNKCIJE DATE GRAFIKOM

Presjeci grafika linearne funkcije sa koordinatnim osama

Ako znamo formulu linearne funkcije, možemo pronaći tačke u kojima njen grafik siječe koordinatne ose. Isto tako, ako znamo tačke presjeka sa osama, možemo nacrtati grafik funkcije i napisati formulu te funkcije.

Aktivnost

1. Kojoj koordinatnoj osi pripada tačka: a) (1,0), b) (0,−2)?
2. Provjeri da li tačke (1,0) i (0,−2) pripadaju grafiku linearne funkcije $y = 2x - 2$.

Primjer 1

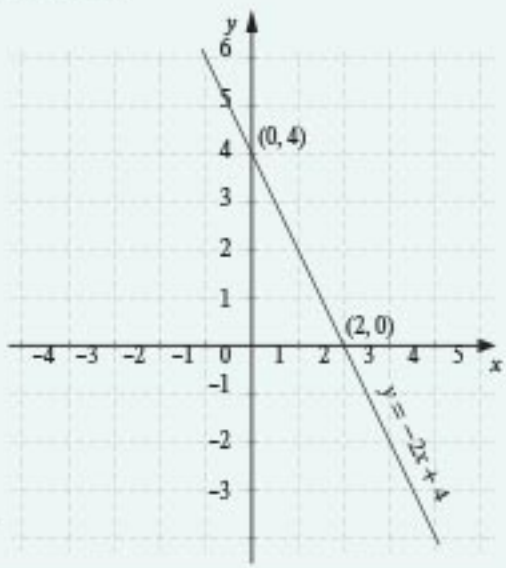
Data je funkcija $y = -2x + 4$.
a) Pronađi tačke presjeka grafika linearne funkcije sa koordinatnim osama.
b) Pronađi nulu linearne funkcije.
c) Nacrtaj grafik linearne funkcije.

a) **Tačka presjeka grafika linearne funkcije sa y-osom** je tačka na grafiku linearne funkcije za koju je x-koordinata jednaka 0.
Za $x = 0$, izračunavamo da je $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$.
Prema tome, tačka (0, 4) je presjek sa y-osom.
Tačka presjeka linearne funkcije sa x-osom je tačka na grafiku linearne funkcije za koju je y-koordinata jednaka 0.
Za $y = 0$, rješavanjem jednačine $-2x + 4 = 0$, dobijamo $x = 2$.
Prema tome, tačka (2, 0) je tačka presjeka grafika sa x-osom.

b) **Nulom linearne funkcije** nazivamo vrijednost promjenljive x za koju je vrijednost funkcije jednaka nuli 0.
Prema tome, nula date funkcije je $x = 2$.

c) Grafik date linearne funkcije prolazi kroz tačke (0, 4) i (2, 0) (crtež 1).

x	0	2
y	4	0



crtež 1

Zadatak 1

Data je linearna funkcija $y = 10 - 5x$.
a) Nađi koordinate tačaka presjeka linearne funkcije sa koordinatnim osama.
b) Pronađi nulu linearne funkcije. c) Nacrtaj grafik linearne funkcije.

Upisivanje linearne funkcije date njenim grafikom

Da bismo grafički predstavili linearnu funkciju

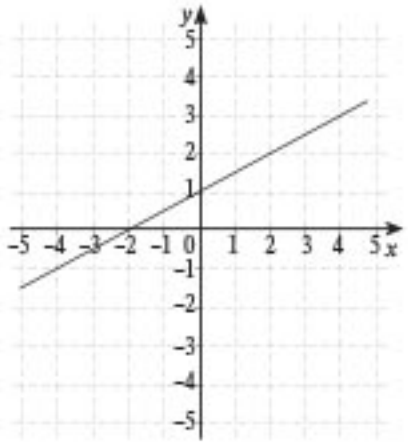
$$y = kx + n,$$

potrebno je da pronađemo vrijednosti koeficijenta pravca k i slobodnog člana n. Istražit ćemo dva načina da bismo pronašli njihove vrijednosti iz grafika funkcije.

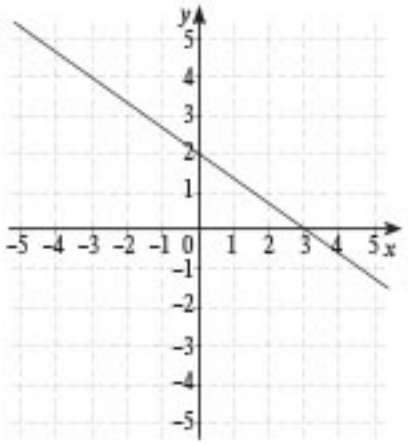
Primjer 2

Napiši linearnu funkciju $y = kx + n$ datu grafikom na crtežu 2:

a)



b)



crtež 2

Objasnimo prvi način pronalaženja koeficijenta i slobodnog člana.

a) **Prvi korak**. Primjećujemo da grafik linearne funkcije siječe y – osu u tački $(0,1)$, tako da će slobodni član biti $n = 1$. Ako zamijenimo $n = 1$ u formuli $y = kx + n$, dobijamo

$$y = kx + 1.$$

Drugi korak. Primjećujemo da grafik linearne funkcije siječe x – osu u tački $(-2, 0)$. Zamjenjujemo njene koordinate u formulu $y = kx + 1$.
Odatle dobijamo da

$$0 = k \cdot (-2) + 1,\ -1 = -2k,\ \ k = \frac{1}{2}.$$

Linearna funkcija koja odgovara datom grafiku je $y = \frac{1}{2}x + 1$.

b) **Prvi korak.** Grafik linearne funkcije siječe y – osu u tački $(0,2)$, pa će slobodni član biti $n = 2$. Ako zamijenimo $n = 2$ u formuli $y = kx + n$, dobijamo

$$y = kx + 2.$$

Drugi korak. Grafik linearne funkcije siječe x – osu u tački $(3, 0)$.
Zamjenjujemo njene koordinate u formulu $y = kx + 2$. Odavde dobijamo da je

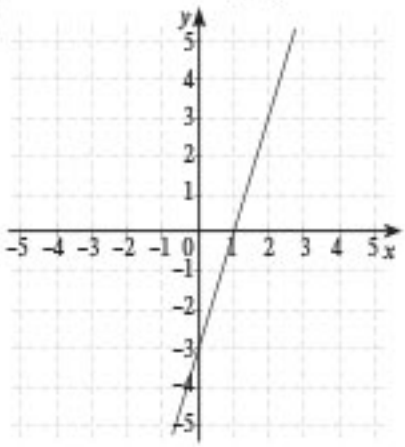
$$0 = k \cdot 3 + 2,\ -2 = 3k,\ \ k = -\frac{2}{3}.$$

Prema datom grafiku dobili smo linearnu funkciju $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

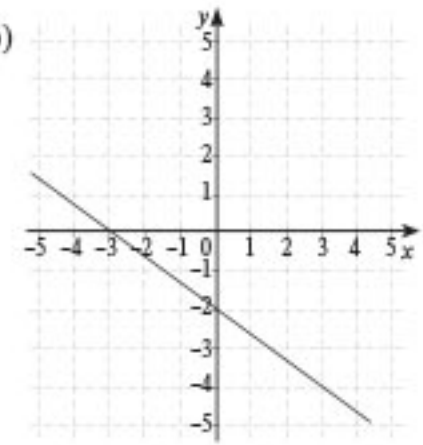
Zadatak 2

Upiši linearnu funkciju $y = kx + n$ datu grafikom na crtežu 3:

a)



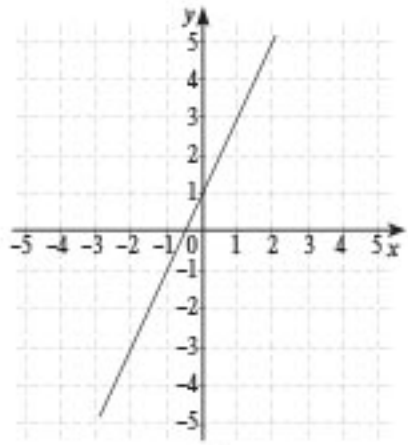
b)



crtež 3

Primjer 3

Napiši linearnu funkciju sa grafika na crtežu 4.



crtež 4

Prema grafiku, sastavljamo tabelu sa vrijednostima za četiri uzastopna cijela broja x.

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

+2 +2 +2

Vidimo da pravilo za sljedećeg člana niza vrijednosti y glasi „dodaj 2“.
Zato, dodajemo red u tabelu sa udvostručenim vrijednostima broja x.

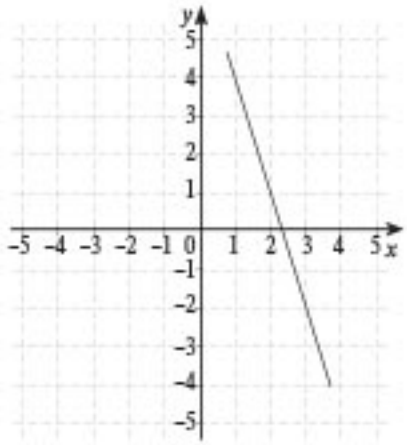
	x	1	2	3	4
·2	y	3	5	7	9
	$2x$	2	4	6	8

+1

Ako uporedimo vrijednosti $2x$ sa vrijednostima y, vidimo da je svaka vrijednost $2x$ uvećana za 1 jednaka odgovarajućoj vrijednosti y.
Prema tome, linearna funkcija je $y = 2x + 1$.

Primjer 4

Napiši linearnu funkciju sa grafika na crtežu 5.



crtež 5

Prema grafiku, sastavljamo tabelu vrijednosti za četiri uzastopna cijela broja x.

x	1	2	3	4
y	4	1	−2	−5

-3 -3 -3

Vidimo da je pravilo za sljedećeg člana niza vrijednosti y „dodaj -3“.
Zato, u tabelu dodajemo red vrijednosti koje su proizvod broja -3 i broja x

	x	1	2	3	4
·(−3)	y	4	1	−2	−5
	$-3x$	−3	−6	−9	−12

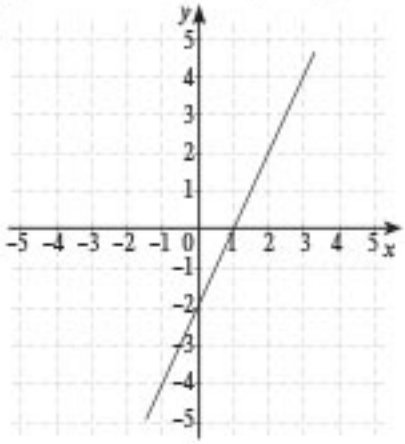
+7

Ako uporedimo vrijednosti $-3x$ sa vrijednostima y, vidimo da je svaka vrijednost $-3x$ uvećana za 7 jednaka odgovarajućoj vrijednosti y.
Znači, linearna funkcija je $y = -3x + 7$.

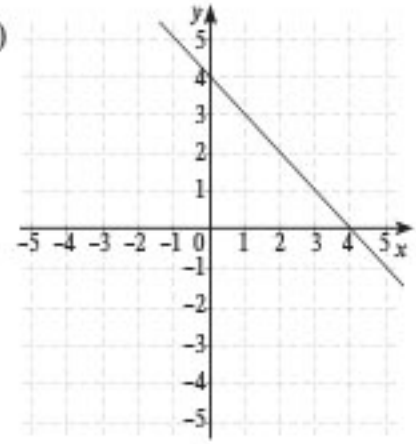
Zadatak 3

Napiši linearnu funkciju sa grafika na crtežu 6.

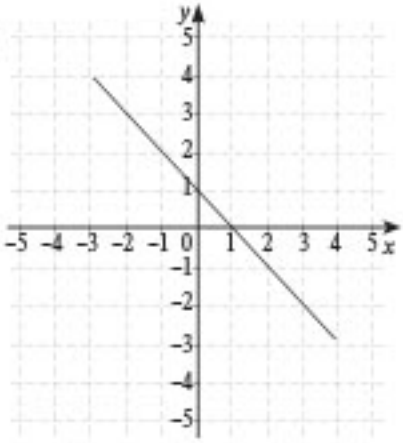
a)



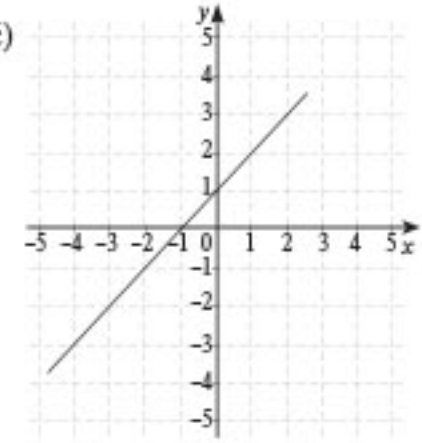
b)



c)



č)

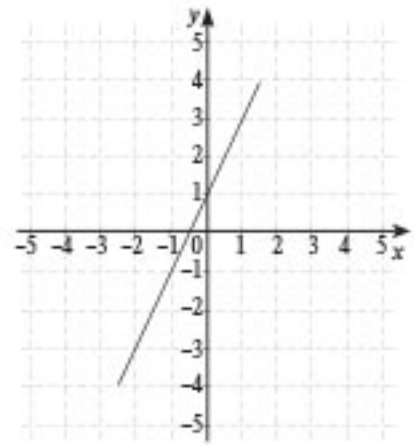


crtež 6

Primjer 5

Marko vozi bicikl uzbrdo. Grafik prikazuje promjenu nadmorske visine y (u metrima) od pređenog rastojanja x (u kilometrima).

a) Napiši linearnu funkciju $y = kx + n$ datu grafikom na crtežu 7.
b) Objasni značenje koeficijenta k i slobodnog člana n.
c) Na kojoj će visini biti Marko kada pređe 2 km?



crtež 7

a) Sa grafika primjećujemo da prava siječe y – osu u tački $(0, 1)$, što znači da je $n = 1$.
Pored toga, grafik prolazi kroz tačku $(1, 3)$ iz koje nalazimo da je

$$3 = k \cdot 1 + 1,\ k = 2.$$

Znači, linearna funkcija je $y = 2x + 1$.

b) Koeficijent $k = 2$ znači da se za svaki pređeni 1 km nadmorska visina povećava za 2 m. Slobodni član $n = 1$ znači da kada je Marko na početku putanje, odnosno kada je $x = 0$, nadmorska visina putanje je 1 m.

c) Vrijednost funkcije u $x = 2$ je $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ m. To znači da će, kada Marko pređe 2 km, biti na nadmorskoj visini od 5 m.

Napomena. Iako je grafikon prikazan za sve vrijednosti x, u kontekstu zadatka, samo dio gdje je $x \geq 0$ ima smisla, jer Marko ne može da pređe „negativnu udaljenost".

Zadatak 4

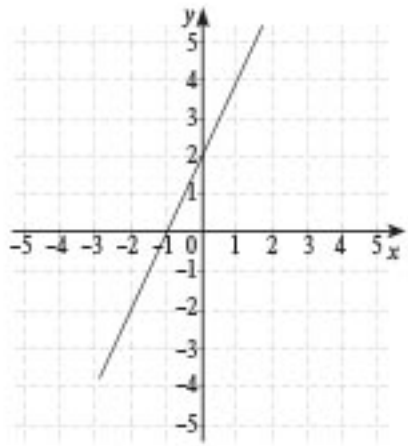
Petar se penje planinskom stazom. Grafik prikazuje zavisnost nadmorske visine y (u metrima) od pređene udaljenosti x (u kilometrima).

a) Napiši linearnu funkciju $y = kx + n$ datu grafikom na crtežu 8.

b) Objasni značenje koeficijenta k i slobodnog člana n.

c) Na kojoj će visini biti Petar kada pređe 2,5 km?

č) Poslije koliko kilometara će Petar biti na visini od 14 m?



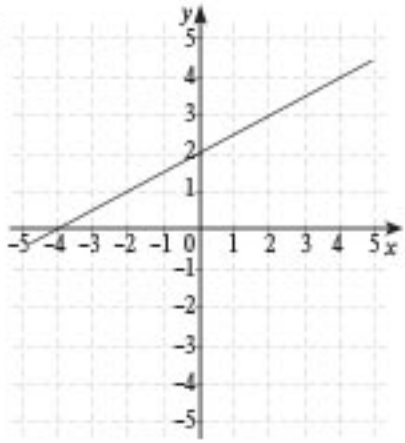
crtež 8

ZADACI ZA VJEŽBANJE

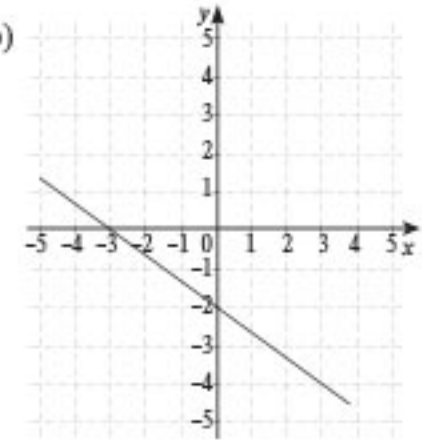
1. Pronađi tačke presjeka sa koordinatnim osama grafika linearne funkcije:
   a) $y = 2x + 5$, b) $y = -3x + 1$.
2. Nađi nulu linearne funkcije: a) $y = x - 5$, b) $y = -x + 2$.
3. Nacrtaj grafik linearne funkcije koristeći njene tačke presjeka sa koordinatnim osama:
   a) $y = -2x$, b) $y = -2x + \frac{1}{2}$, c) $y = \frac{3}{5}x - 3$.

4. Napiši linearnu funkciju $y = kx + n$ datu grafikom na crtežu 9.

a)



b)



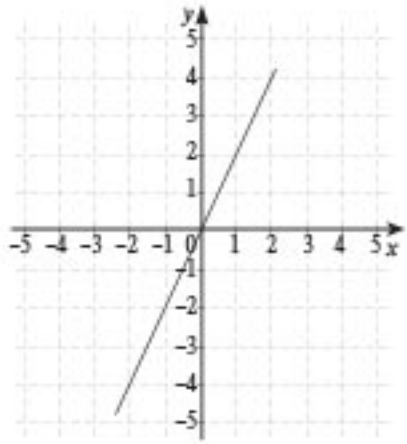
crtež 9

5. Tačke presjeka grafika linearne funkcije sa koordinatnim osama su:
a) $(3, 0)$ i $(0, 4)$, b) $(-4, 0)$ i $(2, 0)$.
Nacrtaj linearnu funkciju i napiši njenu formulu.

6. Nacrtaj linearnu funkciju sa nulom $x = 2$, koja sa x-osom zahvata ugao od 45°.
Napiši formulu funkcije sa njenog grafika.

7. Nacrtaj linearnu funkciju sa nulom u tački $x = -1$, koja sa x-osom zatvara ugao od 135°.
Napiši formulu funkcije sa njenog grafika.

8. Julija kupuje mlijeko u lokalnoj prodavnici. Cijena mlijeka y (u denarima) zavisi od količine mlijeka x (u litrima) koje će kupiti.
a) Napiši linearnu funkciju $y = kx + n$ prema grafiku na crtežu 10.
b) Objasni značenje koeficijenta k i slobodnog člana n.
c) Koliko će Julija platiti ako kupi 3 litra mlijeka?



crtež 10

Istraživanje

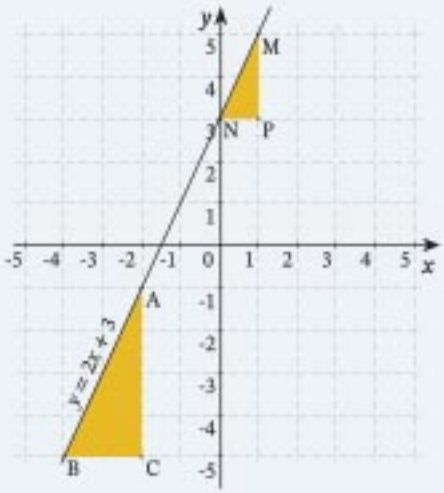
Na crtežu *11* prikazan je grafik linearne funkcije $y = 2x + 3$. Na pravoj su označene dvije proizvoljne tačke *A* i *B*, a zatim i tačka C, tako da je *ABC* pravougli trougao sa pravim uglom u tjemenu C.

a) Prema grafiku, izračunaj količnik dužine katete *AC* i dužine katete *BC*.

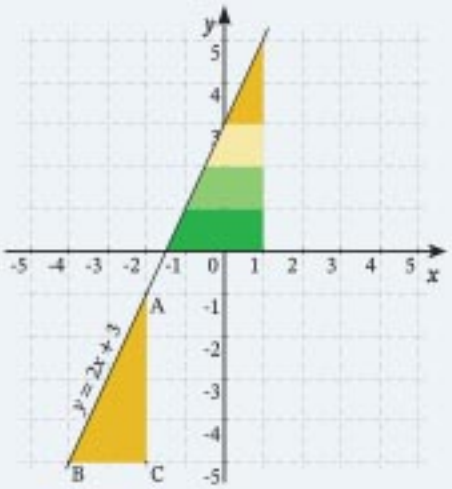
b) Na isti način izračunaj količnik dužine katete *MP* i dužine katete *NP* trougla *MNP*?

c) Za svaki par proizvoljnih tačaka na pravoj, crtanjem linija paralelnih sa osama kroz obje tačke, dobijamo pravougle trouglove (*crtež 12*). Izračunaj količnik katete paralelne sa y-osom i katete paralelne sa x-osom u ovim trouglovima. Uporedi ga sa koeficijentom date linearne funkcije. Šta zaključuješ?

č) Kako će ti zaključak pomoći u postupku pisanja linearne funkcije $y = kx + n$ prema datom grafiku?



crtež 11



crtež 12

ZADACI ZA PONAVLJANJE I UTVRĐIVANJE

1. Svedi monom u normalan oblik:
a) xy^3x^2y, b) $6xy(-2x^4y)$, c) $-4xy^2(-5xy)$, č) $xyxyy4xy$.
Da li postoje slični monomi?

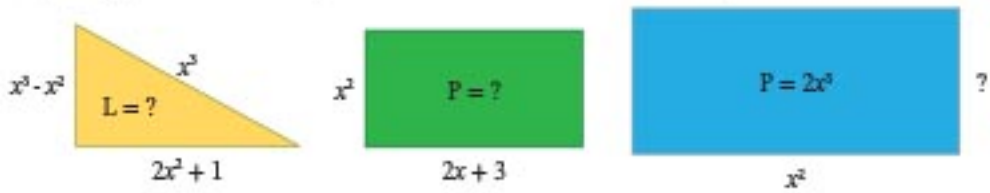
2. Kojeg je stepena monom: a) x^3y^4, b) xy, c) $5x^2y^3z$, č) 3 ?

3. Od zbira monoma $-a^2b$ i $3a^2b$ oduzmi njihovu razliku.

4. Nađi proizvod monoma: a) $4x^3 \cdot x^4 \cdot 2x^5$, b) $a^2b \cdot (-2a^3b^2) \cdot 7ab^3$.

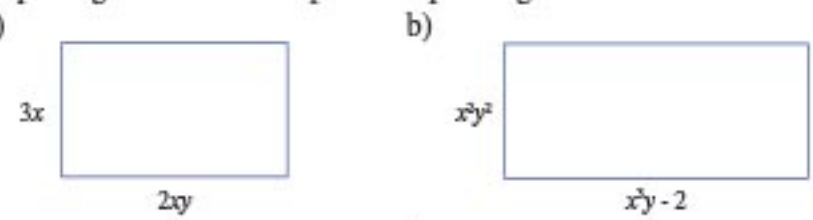
5. Nađi količnik monoma: a) $5x^5y^3 : (-20x^2y^2)$, b) $27a^4b : 3a^3b$.

6. Napiši algebarski izraz kojim ćeš izraziti tražene veličine preko datih elemenata na crtežu 1:



crtež 1

7. Napiši algebarski izraz za površinu pravougaonika sa slike 2:



crtež 2

8. Napiši polinom u normalnom obliku, a zatim odredi njegov stepen:
a) $3xy + x - 5xy + 1$, b) $7ab^2 - 4ab + 5ab + ab^2$,
c) $x^2 - (2x)^3 + xxx - x^2$, č) $2xy^3 + 5(xy)^2z - (3xy)^2z + 8xyy^2$.

9. Dati su polinomi $A = 6x^2 - 5x + 1$, $B = x^2 + 3x - 2$ i $C = x + 3$. Nađi polinome:
a) $A + B + C$, b) $A - B$, c) $C + B - A$, č) $-A + B - C$.

10. Napiši polinome u normalnom obliku: a) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{5y}{6}+\frac{4x}{3}$, b) $\frac{2x}{7}+\frac{3y}{8}-\frac{3x}{2}+2x$.

11. Dva automobila se kreću u istom smjeru. Brzina prvog automobila u funkciji vremena t data je formulom v1=2,5t2 + 0,5t + 10, a brzina drugog automobila u funkciji vremena t data je formulom v2 =1,5t2 + 0,8t + 9,5. Napiši algebarski izraz koji predstavlja razliku njihovih brzina u zavisnosti od vremena t i pojednostavi ga.

12. Izvrši naznačene operacije:
a) $5x^2 + 2x(4x - 1)$, b) $x^2(3x^3 - 2x) - 4(x^3 + 1)$,
c) $(24y^6 + 18y^4) : (-6y^2) + 21y^5 : (-7y^3)$, č) $(5x^3 - x^2y) : x^2 + (30xy - 25y^2) : (-5y)$.

13. Ako je $x = 2$, $y = -3$, $z = 4$ izračunaj vrijednost izraza:
a) $3(2x - y^2) + 4(yz + 1)$, b) $2(-x^3 + 1) - 3yz$,
c) $5(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, č) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

14. Nina prodaje kolačiće. U ponedjeljak je prodala 18. U utorak je prodala 22 kolačića, u srijedu je prodala 26 kolačića, itd.
a) Koliko kolačića je prodala u subotu?
b) Koliko kolačića je ukupno prodala za sedmicu dana, znajući da Nina ne radi u nedjelju?

15. Dat je niz sa opštim članom $a_n = 7n + 1$. Nađi:
a) prva 3 člana, b) članove sa rednim brojevima 300 i 458.

16. Odredi opšti član niza:
a) 12, 15, 18, ..., b) 5, 11, 17, ..., c) 28, 24, 20, ..., č) 14, 9, 4, ...

17. Nađi opšti član niza predstavljenog šemom na crtežu 3.



crtež 3

18. Riješi jednačinu: a) $x-\frac{2}{5}=\frac{x}{10}+\frac{1}{2}$, b) $x-\frac{x}{4}-3=\frac{x}{6}-\frac{x}{3}+2$.

19. Riješi jednačinu: a) $\frac{2}{3}(x-1)+4=\frac{x}{6}$, b) $\frac{1}{8}(2x+3)-\frac{1}{2}(x-1)=\frac{3}{4}$.

20. Riješi jednačinu: a) $0,75x-0,25-\frac{2x}{3}=\frac{1}{3}-4x$, b) $1,25x-0,25-1,5x=x-1,5$.

21. Vrijednost polovine iznosa koji ima Marija, umanjen za 2500 denara, ista je kao 1500 denara umanjenih za trećinu iznosa. Koliko denara Marija ima?

22. Nađi manju stranicu pravougaonika ako je ona $\frac{1}{6}$ od veće stranice i $\frac{1}{14}$ od obima.

23. Nacrtaj grafik linearne funkcije: a) $y = 3x - 5$, b) $y = -x + 3$, c) $y = \frac{1}{3}x$.

24. Pronađi nulu linearne funkcije: a) $y = -x - 4$, b) $y = \frac{x}{4} + 2$.

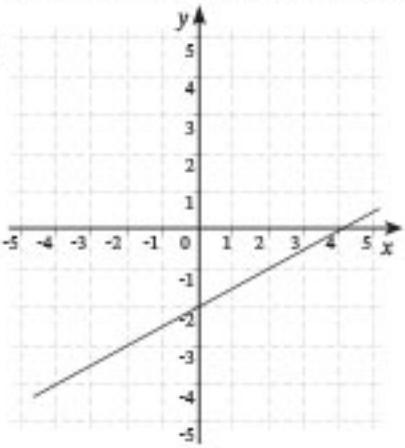
25. Date su linearne funkcije:
$y = -x + 6$, $y = 7x + 26$, $y = -46$, $y = -35x + 4$, $y = 9x$, $y = x + 1$,
$y = -x + 23$, $y = 54x + 43$, $y = -397x$, $y = 200$, $y = x + 100$.
Napiši sve:
a) rastuće funkcije. Koja od njih najbrže raste?
b) opadajuće funkcije. Koja od njih najbrže opada?

26. Napiši linearnu funkciju čiji je grafik paralelan grafiku linearne funkcije $y = 2x + 1$ i siječe grafik linearne funkcije $y = x + 3$ na $y-$ osi.

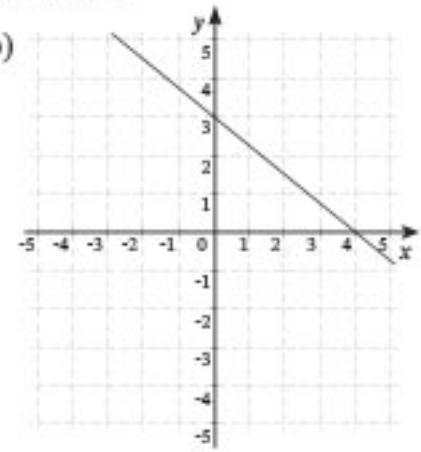
27. Nacrtaj grafik linearne funkcije $y = -x + 2$, a zatim odgovori na sljedeća pitanja:
a) Koliki je koeficijent pravca?
b) U kojoj tački se njegov grafik siječe sa y – osom?
c) Koja je nula funkcije?
č) Opiši tok funkcije,
ć) Nađi vrijednost nezavisne promjenljive, ako je vrijednost funkcije 5,
d) Nađi vrijednost funkcije, ako nezavisna promjenljiva uzima vrijednost –2.

28. Napiši linearnu funkciju datu njenim grafikom na crtežu 4:

a)



b)



crtež 4

29. U kompaniji za iznajmljivanje automobila A, dnevna zakupnina je 500 denara, i plaća se dodatnih 40 denara po pređenom kilometru. U kompaniji B, dnevna zakupnina je 400 denara, a plaća se dodatnih 50 denara po pređenom kilometru.

a) Objasni u kojoj kompaniji je zakup povoljniji u zavisnosti od broja pređenih kilometara.

b) U kojoj kompaniji je zakup povoljniji za put dug 300 km?

c) Koliko će se uštedjeti ako se za put od 500 km izabere povoljnija ponuda?

30. Sonja želi da razmnoži narcise u svojoj bašti. Uklonit će novonastalih 5 lukovica sa svakog korijena, a staru biljku će zadržati.

a) Napiši funkciju za zavisnost broja narcisa nakon razmnožavanja y od broja narcisa prije razmnožavanja x.

b) Koliko će biljaka Sonja imati nakon razmnožavanja 7 narcisa?

31. Na crtežu 5 prikazan je plan stana, na kojem su sve dužine izražene u metrima.



crtež 5

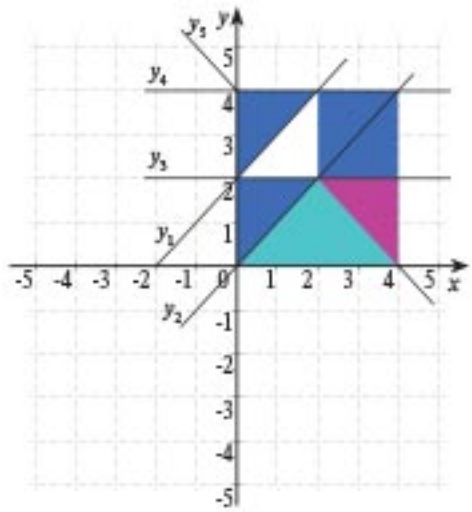
a) Prema datom planu, sastavi izraz u normalnom obliku za:
- Površinu svake od soba,
- Površinu cijelog stana,
- Obim svake od soba

b) Koliko kvadratnih metara pločica je potrebno za popločavanje poda na terasi, u kupatilu i hodniku ako je $x = 0{,}4$?

c) Koliko metara lajsni je potrebno za pod u spavaćoj sobi ako su otvori vrata svaki 0,8?

č) Koliko kvadratnih metara parketa je potrebno za pod u dnevnoj sobi i spavaćoj sobi ako je $x = 0{,}4$?

32. Napiši formule linearnih funkcija: y_1, y_2, y_3, y_4 i y_5, koje se koriste za kreiranje slike na crtežu 6.



crtež 6

33. U istom koordinatnom sistemu, nacrtaj grafike linearnih funkcija:

$y = 2x$, $y = -2x$, $y = x - 8$, $y = -x - 8$, $y = 2x - 8$, $y = -\frac{x}{2} - 2$ i $y = -\frac{x}{2} + 6$.

Izradi umjetnički crtež tako što ćeš dijelove ravni obuhvaćene nacrtanim graficima obojiti različitim bojama.



Tema 4:

MJERENJE

Rezultati učenja:

Pri izučavanju ove teme, moći ćeš da:

- Koristiš jedinice mjere za vrijeme pri rješavanju problema izračunavanjem ili grafički.
- Biraš odgovarajuće jedinice mjere za mjerenje, procjenu, izračunavanje i rješavanje problema u različitim kontekstima, uključujući jedinice dužine, površine i zapremine.

1. MJERNE JEDINICE ZA VRIJEME

Aktivnost

Mehmed trči svako jutro 30 minuta. Koliko sati sedmično trči Mehmed?

Jedna od najčešće korištenih jedinica za mjerenje vremena je dan. To je vrijeme koje je potrebno da se Zemlja jednom okrene oko svoje ose.

Manje jedinice za mjerenje vremena su: **sat (h)**, **minut (min)** i **sekunda (s)**. Veće jedinice za mjerenje vremena su: **sedmica**, **mjesec**, **godina**. Sedmica je vremenski period koji sadrži 7 dana. Mjesec je vremenski period koji sadrži 28, 29, 30 ili 31 dan, ali pri izračunavanju pretpostavljamo da **mjesec ima 30 dana**.

Godina je vrijeme koje je potrebno da se Zemlja jednom okrene oko Sunca i iznosi 365 dana i 6 h. Radi lakšeg izračunavanja, utvrđeno je da tri godine, jedna za drugom, imaju 365 dana, a svaka četvrta godina ima 366 dana. Godine koje imaju 365 dana nazivaju se **obične**, a godina koja ima 366 dana naziva se **prijestupna**. U prijestupnoj godini mjesec februar ima 29 dana, dok u običnim godinama ima 28 dana. Prilikom izračunavanja uzimamo da **godina ima 365 dana**.

Koriste se i veće jedinice mjere od godine, a to su: **decenija**, koja ima 10 godina, **vijek** ili **stoljeće**, koji ima 100 godina, i milenijum, koji ima 1000 godina. Godina ima 12 mjeseci ili 52 sedmice i 1 dan, a u prijestupnim godinama 52 sedmice i 2 dana. Prilikom izračunavanja uzimamo da **godina ima 52 sedmice**.

Vrijeme od jedne sekunde je osnovna jedinica mjere za vrijeme.

Podsjetimo se da između jedinica mjere za vrijeme postoji sljedeći odnos:

mjerna jedinica	veza s manjim mjernim jedinicama
sekunda (s)	osnovna mjerna jedinica
minuta (min)	1 min = 60 s
sat (h)	1 h = 60 min = 3600 s
dan	1 dan = 24 h = 1440 min = 86400 s
sedmica	1 sedmic*a* = 7 dan*a* = 168 h = 10080 min = 604800 s
mjesec	1 mjesec se uzima kao 30 dana u računanju
godina	1 godin*a* = 12 mjeseci = 365 dana
decenija	1 decenij*a* = 10 godin*a* = 120 mjeseci = 3650 dana
vijek	1 vijek = 100 godina
milenijum	1 milenijum = 10 vijekov*a* = 1000 godina

Postoje i manje jedinice mjere od sekunde, kao što su desetina dijela (deseti dio sekunde), stotinka dijela (stoti dio sekunde) i hiljaditi dio (hiljaditi dio sekunde). One se najčešće koriste u sportskim takmičenjima.

Primjer 1

Koliko sati ima u: a) 5 dana, b) 570 min, c) 1 mjesecu?

a) Jedan dan ima 24 sata, pa će 5 dana imati $5 \cdot 24\ \text{h} = 120\ \text{h}$.

b) $570 = 9 \cdot 60 + 30 = 9\ \text{h}\ 30\ \text{min}$.

c) Smatramo da 1 mjesec ima 30 dana, pa je 1 mjesec $= 30 \cdot 24\ \text{h} = 720\ \text{h}$.

Primjer 2

Koliko minuta ima u: a) 1 danu i 3 h, b) 2700 s?

a) 1 dan i 3 h su $(24 + 3)\ \text{h} = 27\ \text{h} = 27 \cdot 60\ \text{min} = 1620\ \text{min}$, b) $2700 : 60 = 45\ \text{min}$.

Zadatak 1

Koliko minuta ima u: a) 2 dana i 2 sata, b) 3180 s?

Primjer 3

Koliko sekundi ima u: a) 5 h i 14 min, b) 3,5 h?

a) $5\ \text{h}\ 14\ \text{min} = (5 \cdot 60 + 14)\ \text{min} = 314\ \text{min} = 314 \cdot 60\ \text{s} = 18840\ \text{s}$,

b) $3{,}5\ \text{h} = 3{,}5 \cdot 60\ \text{min} = 210\ \text{min} = 210 \cdot 60\ \text{s} = 12600\ \text{s}$.

Zadatak 2

Koliko sekundi ima u: a) 3 h i 27 min, b) 3,2 h?

Primjer 4

Koliko sati, minuta i sekundi ima u 9256 s?

$1\ \text{min} = 60\ \text{s}$ i $1\ \text{h} = 60\ \text{min}$.

Dobijamo $9256\ \text{s} = 154\ \text{min}\ 16\ \text{s} = 2\ \text{h}$ i $34\ \text{min}\ 16\ \text{s}$.

Zaključujemo da je $9256\ \text{s} = 2\ \text{h}$ i $34\ \text{min}\ 16\ \text{s}$.

Zadatak 3

Koliko sati, minuta i sekundi ima u: a) 8410 s, b) 12568 s?

Primjer 5

Sara ima 14 godina i 7 mjeseci. Njena majka je 374 mjeseca starija od nje. Koliko godina ima Sarina majka?

Razliku u godinama od 374 mjeseca pretvorićemo u godine i mjesece dijeljenjem:

$$\begin{array}{r} 374 : 12 = 31 \\ -\ \underline{36} \\ \quad 14 \\ -\ \underline{12} \\ \quad 2 \end{array}$$

Prema tome, majka je 31 godinu i 2 mjeseca starija od Sare.
Sarina majka ima $14 + 31 = 45$ godina i $7 + 2 = 9$ mjeseci.

Zadatak 4

Svjetski rekord u maratonu za žene, postavljen 1963. godine od strane Sjedinjenih Država, bio je 3 sata 37 minuta i 7 sekundi. Aktuelni svjetski rekord, koji je 2024. godine postavila Kenija, poboljšan je za 1 sat 27 minuta i 13 sekundi.
Koliki je novi svjetski rekord u: a) satima, minutama i sekundama, b) sekundama?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koliko sekundi ima u: a) 15 h i 23 min, b) 6 h i 15 min i 35 s?
2. Koliko sati i minuta ima u: a) 523 min, b) 1000 min?
3. Pretvori u godine: a) 3 vijeka i 8 decenija, b) 1 milenijum, 6 vijekova i 4 decenije.
4. Šta je veće?
   a) 6 mjeseci ili 3800 sati,
   b) 3 godine i 2 mjeseca ili 1500 dana,
   c) 7 sati i 43 minute i 450 minuta,
   č) 5 sati 15 minuta i 35 sekundi ili 200.000 sekundi?
5. Poredaj brojeve po veličini, počevši od najmanjeg: 730 dana, 2 godine, 90 sedmica i 32 mjeseca.
6. Nika ima 12 godina, 3 mjeseca i 5 dana. Koliko će godina, mjeseci i dana Nika imati poslije 85 mjeseci?
7. Ana i Ema zajedno imaju 358 mjeseci. Ana ima 15 godina i 4 mjeseca. Koliko godina ima Ema?
8. U TV programu, filmski maraton počeo je u 21:15 h i završio se sljedećeg dana u 6:45 h. Izračunaj koliko je minuta trajao maraton.

Istraživanje

Istraži na internetu koliko traju godina, mjesec i dan na nekim drugim nebeskim tijelima. Zatim riješi zadatke. Koristi kalkulator za izračunavanje.

a) Ako s Marsa kreneš na putovanje ka Zemlji, u letjelici koja se kreće brže od zemaljske letjelice, stići ćeš na Zemlju za 2400 sati 180 minuta i 360 sekundi (mjereno po zemaljskom vremenu). Pretvori ovo vrijeme u dane, sate i minute.

b) Lina ima 13 godina, 5 mjeseci i 12 dana, mjereno po zemaljskom vremenu. Koliko godina, mjeseci i dana ima Lina, mjereno po marsovskom vremenu?

c) Marko ima 14 godina, 8 mjeseci i 22 dana, mjereno po zemaljskom vremenu. Koliko godina, mjeseci i dana ima Marko, mjereno po saturnovskom vremenu?

2. GRAFICI U VREMENSKOM KONTEKSTU

Grafik put vrijeme

Aktivnost

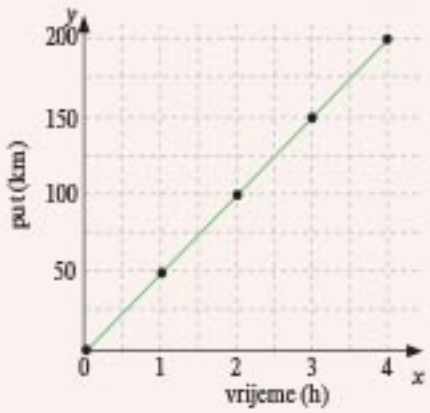
Grafik na crtežu 1 prikazuje putovanje automobila.

a) Koliko je vremena trebalo automobilu da pređe 100 kilometara?

b) Koliko je kilometara automobil prešao za 3 sata?

c) Koliko je kilometara automobil prešao za 1 sat?

č) Kojom brzinom se kreće automobil?



crtež 1

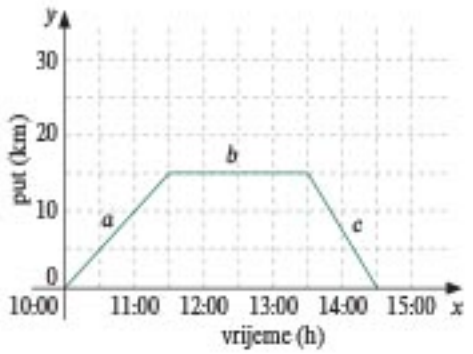
Grafik put – vrijeme predstavlja zavisnost pređenog puta objekta od proteklog vremena. Grafik crtamo u koordinatnom sistemu tako da je vrijeme predstavljeno na x-osi, a rastojanje (put) na y-osi.

Grafik puta i vremena pomaže nam da napravimo analizu kretanja objekata i ljudi.
Naime, iz grafika možemo očitati koliko je neki objekat prešao za neki vremenski period, da li je objekat u mirovanju, kretanju, ubrzavanju ili usporavanju, a također možemo pronaći brzinu kojom se objekat kreće u određenoj fazi.

Skeniraj kod i pogledaj grafikon kretanja.

Primjer 1

Grafik na crtežu 2 predstavlja Emino putovanje biciklom do sastanka i nazad.
a) Koliko je vremena Ema putovala od kuće do mjesta sastanka?
b) Koliko se vremena zadržala na sastanku?
c) Kada je Ema vozila brže, na putu tamo ili na povratku?
č) Koliko brzo je putovala u svakoj etapi?



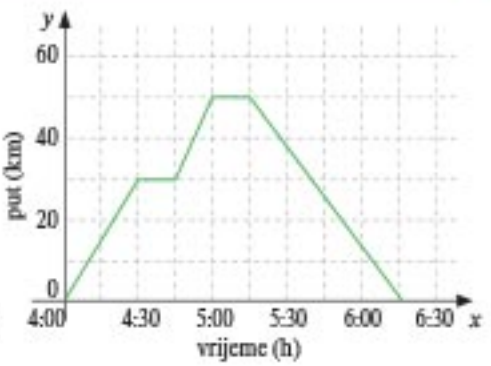
crtež 2

a) Ema je krenula u 10:00 h i stigla u 11:30 h, što znači da je putovala sat i po.
b) Iz grafika vidimo da je od 11:30 h do 13:30 h Ema na istoj udaljenosti od kuće. Dakle, ostala je na sastanku 2 sata.
c) Put u odlasku (etapu a) Ema je prešla za 1,5 h, a isti taj put u povratku (etapu b) prešla je za 1 h, što znači da je pri povratku vozila brže.
č) U etapi *a* prešla je 15 km za 1,5 sat, što znači da je brzina $15 : 1{,}5 = 10$ km/h. U etapi brzina je 0 km/h (mirovanje), a u etapi s prešla je 15 km za 1 sat, pa je brzina bila 15 km/h.

Zadatak 1

Grafik na crtežu 3 prikazuje putovanje taksija koji preuzima putnika u 4:00, vozi ga do aerodroma u 5:00 sati i vraća se nazad.

a) Koliko je ukupno kilometara vozilo prešlo?
b) Koliko je vremena vozilo provelo u mirovanju?



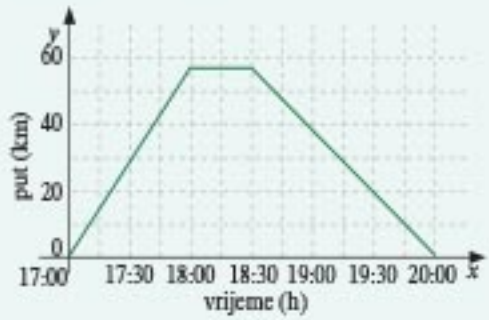
crtež 3

c) Koliko je vremena vozilo provelo u vožnji od početne tačke do aerodroma?
č) U kojoj etapi putovanja se vozilo kretalo najvećom brzinom?

Primjer 2

Marko je krenuo od kuće u 17 sati. Vozio je 1 sat, prešavši 58 kilometara do susjednog grada. Tamo je ostao pola sata. Zatim je krenuo nazad i putovao 1,5 sat do kuće. Nacrtaj grafik koji predstavlja Markovo putovanje.

Na crtežu 4 prikazan je grafik Markovog putovanja.



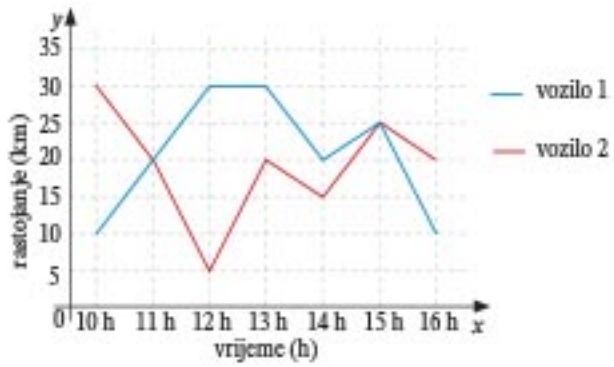
crtež 4

Primjer 3

Na grafiku s crteža 5 prikazano je kretanje dva taksi vozila tokom šestosatnog rada, kroz njihovu udaljenost od taksi-stanice.

a) Koliko puta su tokom tih šest sati bila na istoj udaljenosti od stanice?
U koliko sati?

b) Koje vozilo je prešlo veći put tokom tih šest sati?



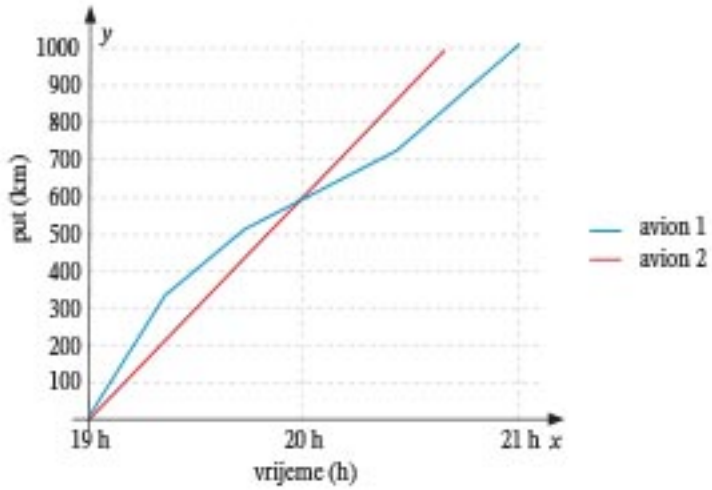
crtež 5

a) Iz grafika vidimo da se linije kretanja vozila sijeku na dva mjesta, što znači da će u 11 sati i u 15 sati biti na istoj udaljenosti od stanice.

b) Vozilo 1 je prešlo 20 km + 10 km + 5 km + 15 km = 50 km.
Vozilo 2 je prešlo 10 km + 15 km + 15 km + 5 km + 10 km + 5 km = 60 km.

Zadatak 2

Na grafiku na crtežu 6 prikazana je putanja dvije avionske linije koje polaze istovremeno.
a) Koliko puta su tokom leta bile na istoj udaljenosti od aerodroma? U koliko sati?
b) Koji je od aviona stigao ranije i za koliko vremena?
c) Koji je avion prešao veći put tokom svog leta?

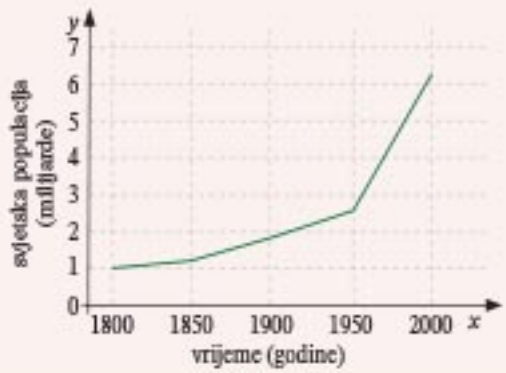


crtež 6

Drugi grafici u vremenskom kontekstu

Aktivnost

Tokom vremena, broj stanovnika na planeti se povećava. Ovaj rast je prikazan na crtežu 7.
a) Za koliko stanovnika se svjetska populacija povećala od 1800. do 2000. godine?
b) Za koliko stanovnika se svjetska populacija povećala od 1800. do 1950. godine?
c) U kojem periodu je zabilježen najveći porast stanovništva i za koliko?



crtež 7

Mnoge svakodnevne aktivnosti, kao i prirodne i društvene pojave, odvijaju se tokom različitih vremenskih intervala.

Skeniraj kod i pogledaj grafikone kretanja.

Pri tome se veličine koje karakterišu aktivnosti i pojave mijenjaju tokom vremena.
Ove promjene opisujemo kreiranjem grafika zavisnosti promjene veličine od proteklog vremena.

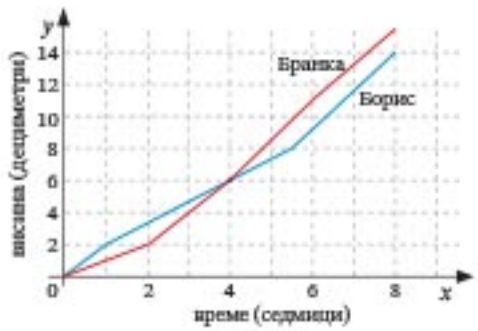
Primjer 4

Branka i Boris sade paradajz u svom dvorištu, svako u posebnom dijelu bašte.
Branka zalijeva biljke 3 do 5 puta sedmično, a Boris smatra da ih treba zalijevati samo 1 do 2 puta sedmično. Svako od njih mjeri visinu svojih biljaka. Grafikon rasta njihovog paradajza dat je na crtežu *8*.

a) Ko je u pravu u vezi sa zalijevanjem? Šta zaključuješ?

b) Poslije koliko vremena su Brankin i Borisov paradajz dostigli istu visinu?

c) U kojem vremenskom intervalu su Brankini paradajzi bili veći, a u kojem Borisovi?



crtež 8

a) Branka je u pravu. Njene biljke su porasle više.
b) Primjećujemo da se grafici sijeku poslije 4 sedmice. Znači, poslije 4 sedmice Borisove i Brankine biljke bile su iste visine.
c) Borisov paradajz bio je viši u prve 4 sedmice, a Brankin paradajz u druge 4 sedmice.

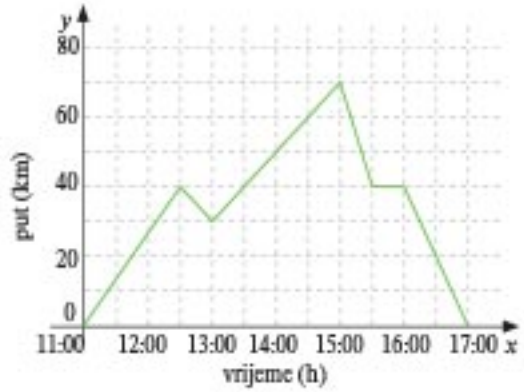
Zadatak 3

Tabela prikazuje prosječne mjesečne temperature u Berovu, Prilepu i Skoplju tokom perioda od jedne godine. Nacrtaj grafik koji predstavlja promjenu temperature tokom prvih 6 mjeseci u godini.

	januar	februar	mart	april	maj	juni
Berovo	2	1	6	8	12	22
Prilep	5	4	15	20	22	28
Skoplje	8	4	18	23	25	29

ZADACI ZA VJEŽBANJE

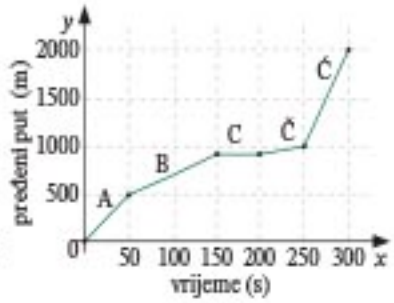
1. Grafik na crtežu 9 prikazuje obilazak grada turističkim autobusom.



crtež 9

a) Koliko je kilometara autobus ukupno prešao?
b) Koliko je trajala pauza?
c) Od koliko do koliko sati je autobus putovao najbrže?
č) Kojom brzinom je putovao od 13:00 h do 15:00 h?

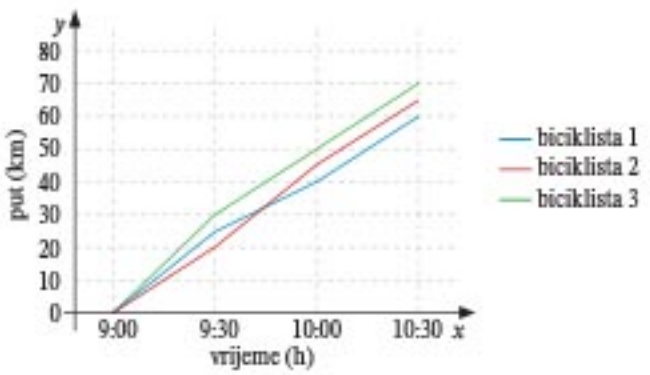
2. Biciklista se penje uz brdo, a zatim spušta. Njegovo kretanje podijeljeno je u 5 faza: A – vožnja po ravnom putu, B – vožnja uzbrdo, C – odmor, Č – guranje bicikla i Ć – spuštanje, kao što je prikazano na grafikonu na slici 10:



crtež 10

a) Koliko minuta je trajala vožnja?
b) Koliko dugo je biciklista gurao bicikl?
c) Koliki je put prešao za 250 minuta?
č) U kojoj etapi je prešao najveću udaljenost?
ć) U kojoj etapi je biciklista putovao najbrže?

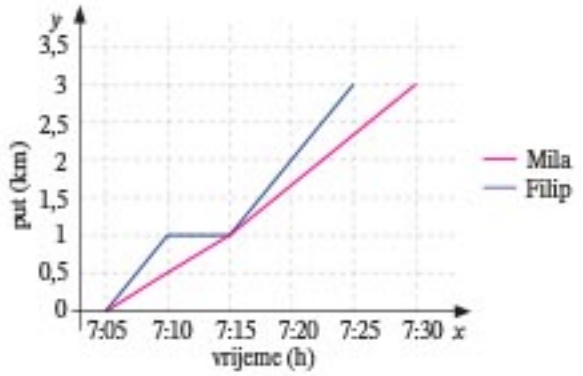
3. Grafik na crtežu 11 prikazuje put tri bicikliste koji su trenirali na brdskoj stazi.



crtež 11

a) Koji je biciklista vozio najbrže u prvih 30 minuta?
b) Koliki put je prešao svaki biciklista?
c) Ko je vozio najsporije od 9:30 h do 10:00 h?

4. Grafik na crtežu 12 prikazuje putovanja Mila i Filipa od njihove kuće do škole. x-osa je vrijeme (od 7:05 h do 7:30 h), a y-osa je udaljenost od kuće (u kilometrima). Mila ide pješice, a Filip vozi bicikl i usput svraća u prodavnicu, a zatim nastavlja.



crtež 12

a) Ko je od njih prvi stigao u školu?
b) Koliko je vremena trebalo Mili da stigne do škole?
c) U koliko sati je Filip svratio u prodavnicu i koliko se dugo tamo zadržao?

5. Elena je krenula od kuće u 8:00 h. Vozila je 30 minuta do svog radnog mjesta, koje je udaljeno 15 km. Ostala je tamo do 13:30 h. Stigla je kući u 13:45 h. Nacrtaj grafikon koji predstavlja Elenino putovanje do posla.

6. Marina i Irina su otišle na zimski odmor sa svojim porodicama. Željele su da pripreme projekat za školu, pa su se dogovorile da zapisuju podatke o udaljenosti na kojoj se nalaze od početne tačke u određenom vremenskom periodu. Djevojčice su prikupile sljedeće podatke:

Marina

Vrijeme (h)	1	2	3	4	5	6
Put (km)	100	180	180	290	380	470

Irina

Vrijeme (h)	1	2	3	4	5	6
Put (km)	80	150	230	230	320	400

Nacrtaj grafike putovanja za obje djevojčice u istom koordinatnom sistemu i odgovori:

a) U koje vrijeme je Irinina porodica napravila pauzu?
b) Čiji se automobil kretao brže u posljednjem satu putovanja?
c) Tokom koje faze putovanja se Marinin automobil kretao najbrže?

7. U tabeli je dat broj prodatih sendviča i broj prodatih sokova u jednoj sendvičari tokom perioda od jedne sedmice. Nacrtaj grafik zavisnosti broja prodatih sendviča i sokova od vremena.

Dan	Ponedjeljak	Utorak	Srijeda	Četvrtak	Petak	Subota	nedjelja
sendviči		70	65	95	86	54	47
sokovi	53	85	87	78	52	62	56

8. **Projektni zadatak**

Učenici osmog razreda iz škole u Skoplju ići će na jednodnevnu edukativnu i naučnu ekskurziju u Štip. Planirano je da posjete: štipski Bezisten, tvrđavu Isar, arheološko nalazište Bargala i gradski muzej Štipa.

Treba planirati pauzu za ručak. Napravi vremenski plan za putovanje i predstavi ga grafikom. Pri tome:

1) Saznaj o vremenima polaska i povratka;

2) Istraži podatke o udaljenosti Skoplje–Štip, kao i za lokaciju mjesta koja treba posjetiti i udaljenost između njih;

3) Izračunaj koliko će vremena biti potrebno da se pređu udaljenosti između mjesta po planu;

4) Isplaniraj redoslijed posjeta na osnovu istraženih podataka o lokaciji i udaljenosti mjesta;

5) Napravi tabelu sa udaljenostima od Skoplja do mjesta koja treba posjetiti i satu dolaska svakog od njih;

	polazak	Bezisten	Isar	ručak	Bargala	muzej
vrijeme						
udaljenost						

6) Predstavi podatke iz tabele grafikonom.

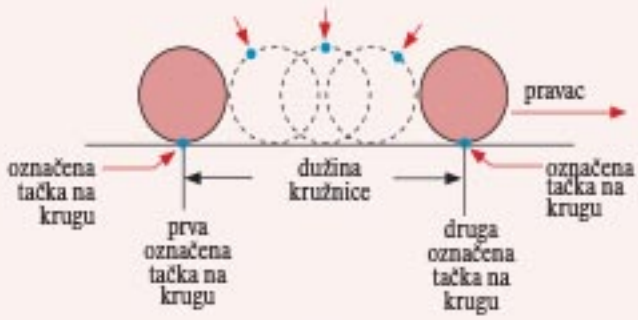
3. DUŽINA KRUŽNICE

Aktivnost

Za aktivnost će ti biti potrebni: lenjir, olovka, predmeti iz svakodnevnog života cilindričnog oblika kao što su konzerva, novčić ili šolja. Za početak, pažljivo izmjeri prečnik kružnice izabranog predmeta, označi jednu tačku na toj kružnici i na površini po kojoj ćeš pomjerati predmet. Na kraju jednog punog obrtaja označi drugu tačku na površini (kao što je prikazano na crtežu 1).

Skeniraj kod i sagledaj obim kružnice.

Rastojanje od prve označene tačke na površini do druge označene tačke na površini tačno je jednako dužini kružnice. Ponovi eksperiment s nekoliko različitih kružnih predmeta i popuni tabelu. Uporedi svoje rezultate sa svojim drugovima iz razreda. Šta primjećuješ?



crtež 1

kružni predmet	dužina kružnice	prečnik kružnice	količnik dužine i prečnika
.			
.			
.			

Pri izvođenju aktivnosti sigurno si primijetio/la da je količnik dužine kružnice i njenog prečnika približno isti za svaku kružnicu.

Količnik dužine kružnice L i njenog prečnika d isti je broj za svaku kružnicu i označen je grčkim slovom π (izgovara se „pi“), $\frac{L}{d} = \pi$.

Dužina kružnice jednaka je proizvodu prečnika kruga i broja π.

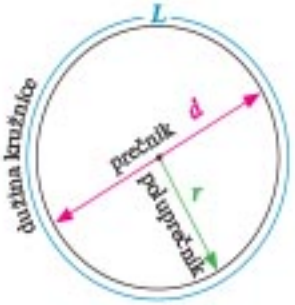
Stoga se dužina kružnice L izračunava pomoću formula:

$$L = d\pi \text{ ili } L = 2\pi r$$

gdje je d prečnik kružnice, a r polupreč nik kružnice (crtež 2).

Broj π je beskonačan neperiodični decimalni broj i naziva se još i **Ludolfov broj**. U početku su naučnici, a kasnije i moćni računari, izračunavali njegove decimale, ali za praktičnu upotrebu koristi se njegova približna vrijednost $\pi \approx 3{,}14$ ili $\pi = \frac{22}{7}$.

Ako kružnicu posmatramo kao granicu kruga, onda se njena dužina L smatra **obimom kruga**.



crtež 2

Primjer 1

Izračunaj dužinu kružnice, ako je: a) $r = 10{,}5$ cm, b) $d = 0{,}8$ m.

a) $L = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}5 \text{ cm} = 3{,}14 \cdot 21 \text{ cm} = 65{,}94 \text{ cm}$, b) $L = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 0{,}8 \text{ m} = 2{,}512 \text{ m}$.

Zadatak 1

Izračunaj dužinu kružnice, ako je: a) $r = 2{,}3$ m, b) $d = 7\frac{2}{5}$ m.

Zadatak 2

Ana i Marko trče u parku na kružnoj stazi poluprečnika 14 m.

a) Izračunaj dužinu staze kojom trče.

b) Koliko metara će ukupno svako od njih pretrčati ako trče 3 kruga?

Aktivnost

Kako možeš pomoću formule:

a) $L = d\pi$ izračunati prečnik kruga?

b) $L = 2\pi r$ izračunati poluprečnik kruga?

Primjer 2

Čelična traka dužine 1 m je savijena u kružnicu. Koliki je prečnik kružnice?

Prečnik kružnice je $d = \frac{L}{\pi} \approx \frac{1\text{m}}{3{,}14} \approx 0{,}32$ m.

Primjer 3

Izračunaj poluprečnik kružnice čiji je obim $4{,}5\pi$ cm.

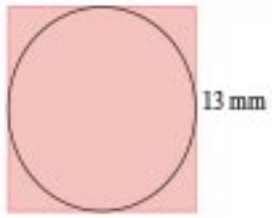
Poluprečnik kružnice je $r = \dfrac{L}{2\pi} = \dfrac{4{,}5\,\text{cm} \cdot \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \dfrac{4{,}5\,\text{cm}}{2} = 2{,}25\,\text{cm}.$

Zadatak 3

U parku je planirana izgradnja kružne cvjetne bašte. Dužina ograde koja će ograđivati cvjetnu baštu treba da bude 31,4 m. Koliki treba da bude poluprečnik cvjetne bašte?

Primjer 4

Mali ukras za nakit ima oblik kvadrata sa stranicom $a = 13$ mm (crtež 3). Unutar kvadrata treba postaviti žicu u obliku kružnice koja dodiruje stranice tog kvadrata. Koliko milimetara žice je potrebno za izradu ukrasa?



crtež 3

Iz uslova u zadatku za prečnik kružnice, nalazimo da je $d = a = 13$ mm.
Izračunavamo dužinu kružnice

$$L = d \cdot \pi \approx 13\ \text{mm} \cdot 3{,}14 = 40{,}82\ \text{mm}.$$

Prema tome, dužina žice je 40,82 mm.

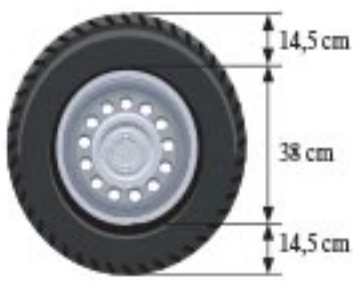
Zadatak 4

Oko kvadratne cvjetne leje sije se trava kao na crtežu 4. Izračunaj dužinu zaštitne ograde oko kruga, ako je dijagonala kvadratne leje 2,5 m.


crtež 4

Zadatak 5

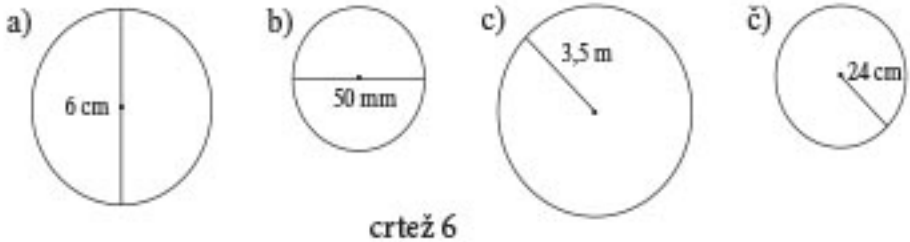
Dimenzije automobilskog točka date su na crtežu 5. Zaokruži na najbliži metar put koji će bicikl preći ako napravi 15 obrtaja?



crtež 5

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj dužinu kružnica datih na crtežu 6.



crtež 6

2. Precrtaj tabelu u svesci i dopuni je potrebnim dimenzijama za kružnicu:

r	5 cm	8 mm				
d			1 m	6 dm		
L					25,12 cm	3π dm

3. Učenici u naučnoj laboratoriji prave sunčani sat. Htjeli bi da postave metalnu žicu oko sata poluprečnika 20 cm. Koliko metara metalne žice će im biti potrebno?

4. Naučnici planiraju da lansiraju satelit koji će se kretati oko Zemlje u kružnoj orbiti na visini od 500 km iznad Zemljine površine. Poluprečnik Zemlje je približno 6371 km.
   a) Izračunaj poluprečnik orbite satelita.
   b) Izračunaj dužinu orbite u kojoj će se satelit kretati.

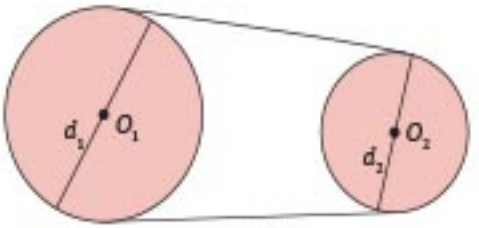
5. Automobilska guma ima prečnik od 70 cm (crtež 7).
   a) Izračunaj njen obim.
   b) Koliko kilometara će preći ako napravi 20000 punih obrtaja?
   c) Koliko puta će se točak okrenuti ako vozilo pređe rastojanje od 45 km?



crtež 7

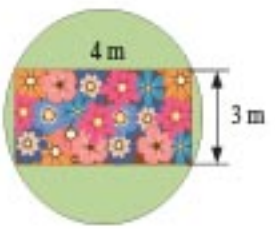
6. Novoizgrađeni kružni školski bazen za aktivnosti ima obim od 94,2 m. Izračunaj prečnik bazena.

7. Dva zupčanika na mašini imaju prečnike $d_1 = 60$ cm i $d_2 = 45$ cm i povezani su kaišem (crtež 8). Veći zupčanik se okreće pomoću motora tako da napravi 180 obrtaja za 1 minut, i preko kaiša, rotacija većeg zupčanika također okreće manji zupčanik. Koliko obrtaja u minuti će napraviti manji zupčanik?



crtež 8

8. Travnjak kružnog oblika postavljen je oko pravougaone cvjetne leje (crtež 9). Travnjak treba da bude ograđen sa 2 reda zaštitne trake. Kolika je dužina trake potrebna za ograđivanje travnjaka ako su stranice pravougaone cvjetne leje 3 m i 4 m?



crtež 9

9. Dva identična točka postavljena su na pravoj stazi tako da su im centri udaljeni 9,31 m (crtež 10). Poluprečnik svakog točka je 3,5 cm. Točkovi se istovremeno kreću jedan prema drugom i naprave 1 potpuni obrt za 1 sekundu. Poslije koliko vremena će se sudariti? Koristi $\pi \approx \frac{22}{7}$.



crtež 10

Istraživanje

1. Napravi letak o broju π u koji ćeš unijeti zanimljive činjenice iz historije matematike o ovom broju i njegovom značenju.



slika 1

2. Mjerni točak (slika 1) je instrument koji se koristi za mjerenje rastojanja. Sastoji se od točka, drške i uređaja koji broji broj potpunih obrtaja točka.
Obezbijedi mjerni točak obima 1 m. Izračunaj poluprečnik točka, a zatim provjeri svoj proračun mjerenjem.

Koristi mjerni točak za mjerenje rastojanja, na primjer u školskom dvorištu, sportskom igralištu ili dužinu ograde oko škole.
Kolika bi bila greška u mjerenju kilometra ako bi tvoj mjerni točak imao poluprečnik koji je manji za: a) 1 cm, b) 1 mm, c) 0,1 mm?

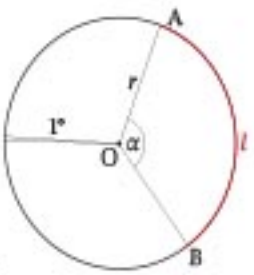
4. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК

Aktivnost

Nacrtaj tri analogna sata sa brojevima od 1 do 12 na kružnici. Označi luk na kružnici koji prikazuje putanju koju prelazi vrh male kazaljke na:
a) prvom satu od 16:00 h do 22:00 h,
b) drugom satu od 12:00 h do 16:00 h,
c) trećem satu od 12:00 h do 15:00 h.
Za svaki od sljedećih slučajeva, odredi koliki dio kruga zauzima luk i koliko stepeni ima odgovarajući centralni ugao?

Izračunajmo dužinu l kružnog luka $\overset{\frown}{AB}$ sa poluprečnikom r, ako je odgovarajući centralni ugao α (crtež 1).
Centralni ugao od 1° odgovara kružnom luku čija će dužina biti $\frac{1}{360}$ dužine kružnice, odnosno

$$l_{1^\circ} = \frac{1}{360} \cdot L = \frac{L}{360} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{2\pi r \cdot 1^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ}.$$



crtež 1

Centralni ugao od 2° odgovara kružnom dva puta dužem luku od prethodnog, odnosno

$$l_{2^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r \cdot 2^\circ}{180^\circ}, \text{ itd.}$$

Na taj način, zaključujemo da centralni ugao α odgovara kružnom luku dužine:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

U kružnici sa poluprečnikom r, dužina kružnog luka l koji odgovara centralnom uglu α, izračunava se formulom:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Primjer 1

Izračunaj dužinu kružnog luka kružnice poluprečnika 12 cm, koji odgovara centralnom uglu $\alpha = 18^\circ$.

Prema formuli za izračunavanje dužine kružnog luka, nalazimo da je:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \approx \frac{3{,}14 \cdot 12\,\text{cm} \cdot 18^\circ}{180^\circ} = 3{,}768\ \text{cm}.$$

Zadatak 1

Izračunaj dužinu kružnog luka koji odgovara centralnom uglu od 140° u kružnici sa poluprečnikom od 3,2 dm.

Zadatak 2

Izračunaj dužine kružnih lukova dvije koncentrične kružnice sa poluprečnicima $r_1 = 3$ cm i $r_2 = 5$ cm, koji odgovaraju istom centralnom uglu $\alpha = 122^\circ\ 30'$.

Zadatak 3

Marko bi htio da postavi žičanu ogradu oko male bašte u obliku kruga sa poluprečnikom od 4 m. Koliko metara žice Marko treba da kupi ako želi da ograda bude polovina kružnice?

Aktivnost

Kako možeš iz formule $l = \frac{\pi r \alpha}{180°}$ da izračunaš:

a) poluprečnik r, sa zadanim l i α, b) centralni ugao α, sa datim r i l?

Primjer 2

Izračunaj poluprečnik kružnice u kojoj kružni luk dužine $l = 11$ cm odgovara centralnom uglu $\alpha = 42° 30'$.

Dati centralni ugao potrebno je pretvoriti u stepene: $\alpha = 42° 30' = 42{,}5°$.
Iz formule za izračunavanje dužine kružnog luka, nalazimo da poluprečnik kruga iznosi:

$$r = \frac{180° \cdot l}{\pi \alpha} \approx \frac{180° \cdot 11\text{cm} \cdot 7}{22 \cdot 42{,}5°} = 14{,}8 \text{ cm}, \text{ gdje je } \frac{1}{\pi} \text{ zapisano kao } \frac{7}{22}.$$

Zadatak 4

Anđela želi da napravi stazu u dvorištu koja je dio kružnice.
Dužina staze je 15 m, a centralni ugao kružnice koji staza obuhvata je 120°.
Koliki je poluprečnik kružnice koji formira stazu?

Primjer 3

Jovan postavlja kružnu rampu za bicikle. Dužina kružnog luka rampe je 8 m, a poluprečnik kružnice čiji je rampa dio je 5 m.
Koliki je centralni ugao α kružnice čiji je rampa dio?

Prema formuli za izračunavanje dužine kružnog luka, nalazimo da centralni ugao α kružnice, čiji je dio rampa, iznosi:

$$\alpha = \frac{180° \cdot l}{\pi r} \approx \frac{180° \cdot 8\text{m}}{3{,}14 \cdot 5\text{m}} = 91{,}7° \cdot$$

Zadatak 5

Izračunaj centralni ugao u kružnici poluprečnika 10 cm, ako je dužina kružnog luka koji odgovara tom uglu 6,28 cm.

Primjer 4

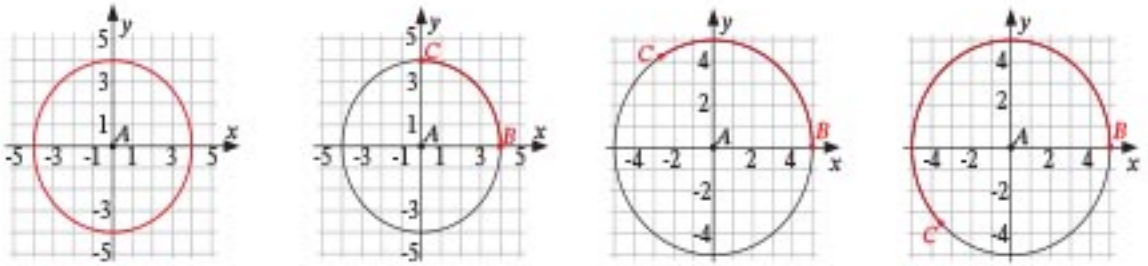
Bez korištenja formule za dužinu kružnog luka, odredi dužinu kruga u kojem centralni ugao od 40° odgovara kružnom luku dužine 6 dm.

Pošto je $\alpha = 40° = \frac{1}{9} \cdot 360°$, dužina kruga je $L = 9 \cdot l = 6\text{ dm} \cdot 9 = 54\text{ dm}$.

Zadatak 6

Izračunaj dužinu kružnog luka označenog crvenom bojom na crtežu 2.

a) Cijeli krug b) Četvrtina kruga c) Trećina kruga č) Pet osmina kruga



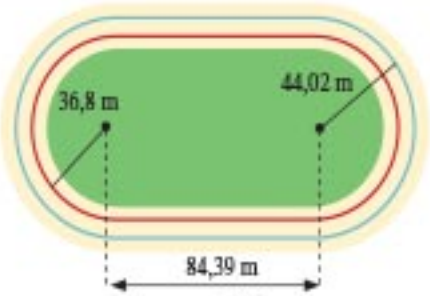
crtež 2

Primjer 5

Dva trkača trče na atletskoj stazi - jedan na plavoj, a drugi na crvenoj stazi. Uglovi koji odgovaraju kružnim lukovima su po 180°, a poluprečnici krugova za svakog trkača dati su na crtežu 3.

a) Koliko rastojanje svaki trkač pređe ako pretrči jedan krug na stazi?

b) Zaokruži na najbliži metar razliku među istrčanim dužinama.



crtež 3

Staza svakog trkača sastoji se od 2 prave staze i 2 polukružne staze.

Crvena staza je dugačka $2 \cdot 84{,}39\text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 36{,}8\text{ m}) \approx 399{,}88\text{ m}$.

Plava staza je dugačka $2 \cdot 84{,}39\text{ m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 44{,}02\text{ m}) \approx 445{,}23\text{ m}$.

Razlika između dužine plave staze i dužine crvene staze, zaokružena na najbliži metar, iznosi:

$445{,}23\text{ m} - 399{,}88\text{ m} = 45{,}35\text{ m} \approx 45\text{ m}$

Zadatak 8

Matej treba da zasadi i ogradi baštu u obliku tri četvrtine kruga u uglu svoje kuće (crtež 1). Ograda je dugačka 38 m. Koliki treba da bude poluprečnik bašte da bi mogao da ogradi cijelu baštu? Zaokruži rezultat na najbliži cijeli broj metara.



slika 1

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj:
   a) dužinu kružnog luka u kružnici sa poluprečnikom $r = 12$ cm i odgovarajućim centralnim uglom $\alpha = 120°$,
   b) dužinu kružnog luka u kružnici prečnika $d = 8$ cm i odgovarajućim centralnim uglom $\alpha = 22° 30'$,
   c) centralni ugao koji odgovara kružnom luku dužine $l = 3{,}14$ cm i poluprečniku kružnice $r = 2$ cm,
   č) poluprečnik kružnice u kojoj centralni ugao $\alpha = 108°$ odgovara kružnom luku dužine $l = 9{,}42$ cm.

2. Istraživači su kartografisali komad leda koji predstavlja jednu osminu kružne polarne ledene površine poluprečnika 1000 km. Kolika je dužina zakrivljenog dijela tog komada leda?

3. Kolika je dužina kružnog luka čiji je odgovarajući centralni ugao 135° u kružnici dužine 6,8 cm?

4. Koliki je poluprečnik Zemlje, ako je dužina Zemljinog meridijana približno 40.000 km?

5. Na času biologije, učenici uče o obliku krvnih sudova. Izmjerili su dio krivine velikog arterijskog luka i utvrdili da je njegova dužina 12 cm, a centralni ugao koji odgovara luku je 90°. Koliki je poluprečnik kružnice čiji je dio krivine arterije?

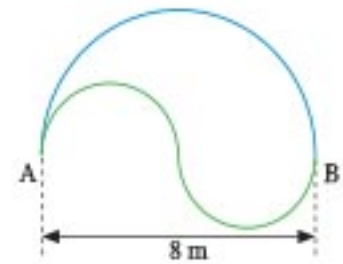
6. Tobogan na dječijem igralištu ima kružnu krivinu sa dužinom luka od 12 m i centralnim uglom od 120°. Koliki je poluprečnik krivine?

7. Jovan postavlja ogradu oko kružne cvjetne bašte. On je izmjerio da je dužina kružnog luka koji odgovara centralnom uglu od 60° jednaka 5,24 metra. Koliko metara ograde je potrebno da bi se ogradila cijela bašta?

8. Koliki je centralni ugao koji odgovara kružnom luku čija je dužina jednaka poluprečniku kruga?

9. Koja je kraća staza od A do B na crtežu 4, plava ili zelena staza?

10. Periferni ugao od 36° zahvata kružni luk dužine 2,5 m. Odredi obim kruga.

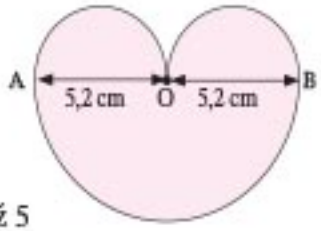


crtež 4

11. Dužina Zemljinog meridijana je 40003,423 km. Izračunaj dužinu luka koji odgovara: a) 1°, b) 1′. (Dužina luka Zemljinog meridijana koji odgovara 1′ naziva se nautička milja).

12. Metalna traka je savijena u obliku kružnice poluprečnika 4 cm. Za potrebe limarske radionice, ta traka je otvorena u kružni luk poluprečnika 10 cm. Koliki je centralni ugao koji odgovara dobijenom kružnom luku?

13. Čestitka je sastavljena od tri polukruga, pri čemu je O centar velikog polukruga (crtež 5). Sara želi da ukrasi rastojanje oko čestitke trakom. Koliko trake joj je potrebno? Zaokruži odgovor na najbliži centimetar.



crtež 5

Istraživanje

Prije više od 2000 godina, grčki naučnik Eratosten je procijenio obim Zemlje, pretpostavljajući da su Sunčevi zraci paralelni. U podne za vrijeme ljetne dugodnevnice, u Sijeni (današnji Asuan) Sunce je padalo vertikalno (bez sjenke u bunaru), dok je u Aleksandriji vertikalni štap bacao sjenku pod uglom od 7,2° (crtež 6).

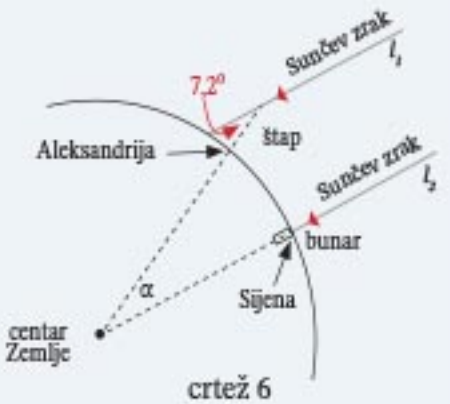
Rastojanje po meridijanu od Sijene do Aleksandrije je oko 5000 stadija („stadij" je stara egipatska mjera za dužinu).

a) Koliki je centralni ugao α između gradova?

b) Objasni kako je Eratosten procijenio obim Zemlje.

c) Procijeni obim Zemlje u stadijima.

č) Ako je 1 stadij = 157,5 m, izračunaj koliki je obim Zemlje u kilometrima.



crtež 6

5. PERIMETAR (OBIM) SLOŽENIH 2D OBLIKA

Aktivnost

Farma u obliku pravougaonika sa dimenzijama 400 m i 350 m ograđena je sa 4 reda žice (slika 1).

Izračunaj:

a) obim farme,

b) ukupnu dužinu žice za ograđivanje,

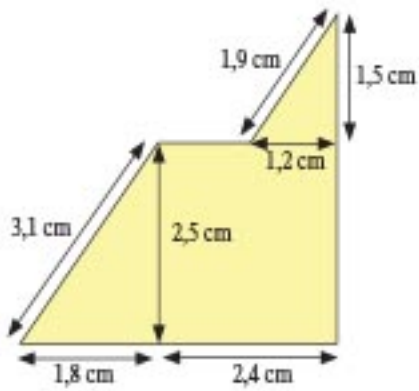
c) koliko košta žica za ograđivanje ako je cijena 140 denara po metru.


slika 1

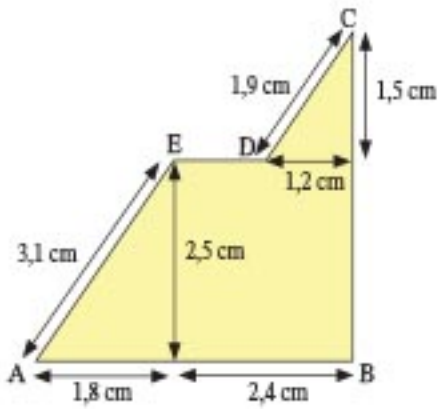
Često u svakodnevnom životu postoji potreba za izračunavanjem zbira dužina jednostavnih ili složenih 2D oblika. U tom slučaju, obraćamo pažnju na to od kojih 2D oblika ili njihovih dijelova je sastavljen složeni 2D oblik i koristimo već poznate formule za izračunavanje obima.

Primjer 1

Izračunaj obim složenog 2D oblika prikazanog na crtežu 1.



crtež 1



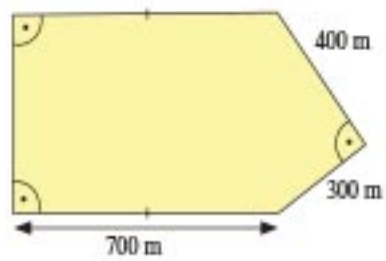
crtež 2

Prema crtežu 2 nalazimo da je $\overline{DE} = 2{,}4\text{ m} - 1{,}2\text{ m} = 1{,}2\text{ m}$.
Obim je zbir dužina stranica složenog 2D oblika:

$$L = 1{,}5\text{ m} + 1{,}9\text{ m} + 1{,}2\text{ m} + 3{,}1\text{ m} + 1{,}8\text{ m} + 2{,}4\text{ m} + 2{,}5\text{ m} = 14{,}4\text{ m}.$$

Zadatak 1

Konstantin trči oko obližnjeg tržnog centra ujutro.
Njegove dimenzije su date na crtežu 3.
Koliko puta mora da obiđe tržni centar da bi pretrčao ukupno 13 km?



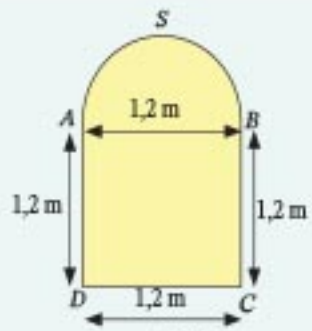
crtež 3

Primjer 2

Na crtežu 4 prikazan je prozor koji se sastoji od kvadrata i polukruga. Izračunaj njegov obim.

Obim prozora je zbir dužina stranica AD, DC и BC i dužine polukružnice ASB. Pošto je $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{DC} = 1{,}2\text{ m}$, a polukrug ima prečnik 1,2 m, dobijamo da

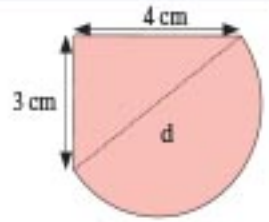
$$L = 3 \cdot \overline{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \pi \approx 3 \cdot 1{,}2\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\text{ m} \cdot 3{,}14 =$$
$$= 3{,}6\text{ m} + 1{,}884\text{ m} = 5{,}484\text{ m}.$$



crtež 4

Primjer 3

Privjesak prikazan na crtežu 5 treba da bude obrubljen zlatnom žicom. Izračunaj dužinu zlatne žice koja treba da se upotrijebi.



crtež 5

Privjesak je sastavljen od pravouglog trougla i polukružnice. Prečnik kružnice je

$$d=\sqrt{(3\text{cm})^2+(4\text{cm})^2}=\sqrt{9\text{cm}^2+16\text{cm}^2}=\sqrt{25\text{cm}^2}=5\text{cm}.$$

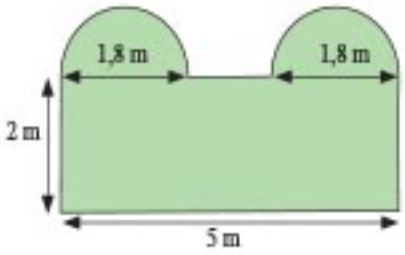
Obim privjeska je zbir dužina kateta pravouglog trougla i poluobima kruga:

$$L\approx 3\text{cm}+4\text{cm}+\frac{5\text{cm}\cdot 3{,}14}{2}=14{,}85\ \text{cm}\approx 15\ \text{cm}.$$

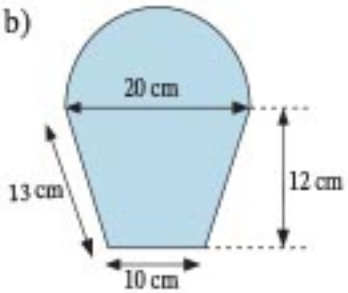
Zadatak 2

Izračunaj obim dvodimenzionalnih oblika datih na crtežu 6.

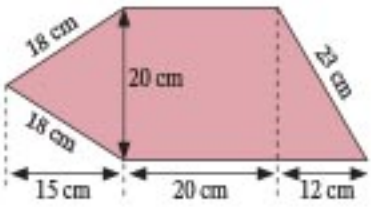
a)



b)



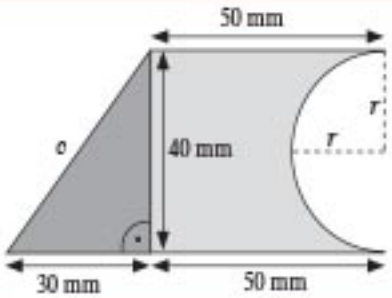
c)



crtež 6

Zadatak 3

Izračunaj obim mašinskog elementa datog na crtežu 7.



crtež 7

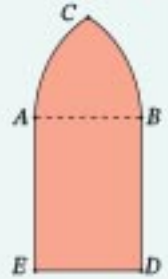
Primjer 4

Kolika dužina PVC profila će biti potrebna da bi se napravio prozor oblika kao na crtežu 8. Tačke A, B i C su tjemena jednakostraničnog trougla, A je centar kružnog luka $\overset{\frown}{BC}$, B je centar kružnog luka $\overset{\frown}{AC}$, $\overline{ED}=0{,}5$ m i $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}$.

Pošto su A, B i C tjemena jednakostraničnog trougla, kružni lukovi zahvataju uglove od 60°, ($a=60°$, $r=\overline{AB}=0{,}5$ m, $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}=2\cdot 0{,}5=1$ m).
Obim figure je:

$$L\approx 1+0{,}5+1\text{m}+2\cdot\frac{0{,}5\text{m}\cdot 60°\cdot 3{,}14}{180°}=2{,}5\text{m}+2\cdot 0{,}52\text{m}=3{,}54\ \text{m}.$$

Za izradu prozora potrebno je 3,54 m PVC profila.



crtež 8

Primjer 5

Na crtežu 9 predstavljen je travnjak u obliku trapeza i kružna cvjetna leja u njemu. Travnjak i cvjetna leja treba da se ograde sa 2 reda dekorativnog užeta čija je cijena 78 denara po metru. Koliko novca treba da plati preduzeće „Uređen grad" za ograđivanje užetom?

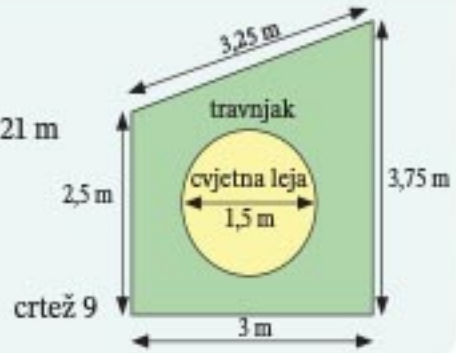
Dužina 1 reda užeta koji je potreban za ograđivanje iznosi:

$L = L_t + L_c \approx 3\text{ m} + 3{,}75\text{ m} + 3{,}25\text{ m} + 2{,}5\text{ m} + 1{,}5\text{ m} \cdot 3{,}14 = 17{,}21\text{ m}$

Za 2 reda potrebno je približno $17{,}21 \cdot 2 = 34{,}42$ m užeta.

Suma koju treba da plati preduzeće iznosi:

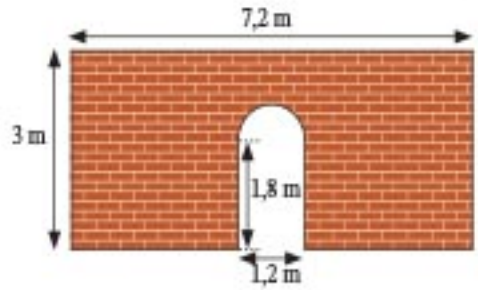
$34{,}42\text{ m} \cdot 78\text{ den.} = 2684{,}76\text{ den.} \approx 2685$ denara.



crtež 9

Zadatak 4

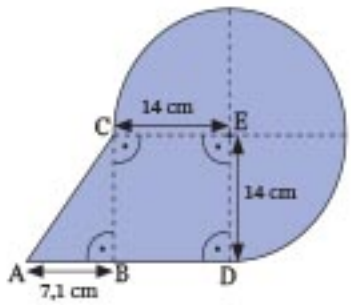
Izračunaj koliko će letvica biti potrebno da se završi zid oblika i dimenzija kao na crtežu 10.



crtež 10

Zadatak 5

Izračunaj obim oblika prikazanog na crtežu 11.

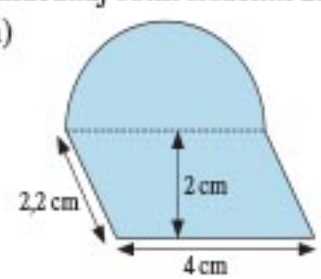


crtež 11

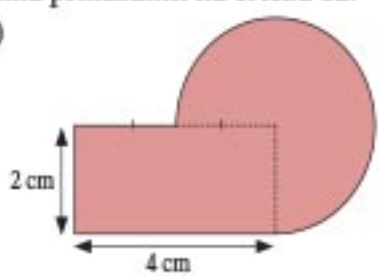
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj obim složenih 2D oblika prikazanih na crtežu 12:

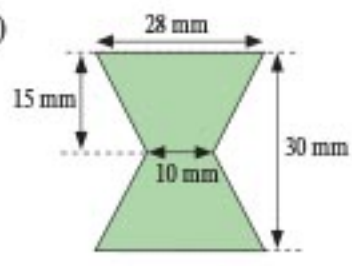
a)



b)

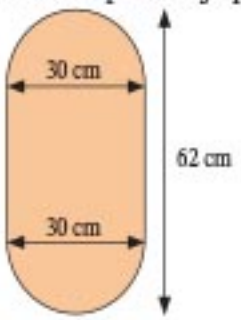


c)

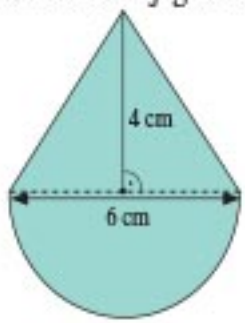


crtež 12

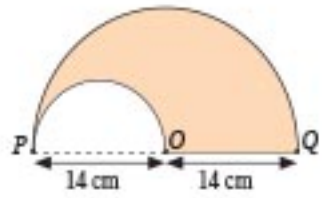
2. Crtež *13* prikazuje prozor aviona. Pronađi njegov obim.



crtež 13



crtež 14

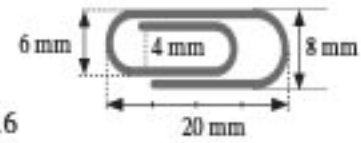


crtež 15

33. Na crtežu 14 prikazana je vezena aplikacija za odjeću koju treba opšiti po ivicama ukrasnom trakom. Izračunaj dužinu trake koja će se upotrijebiti za ukrašavanje.

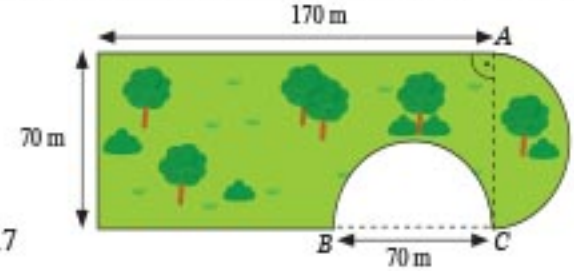
4. Mašinski radnik siječe veliki polukrug prečnika 28 cm. Zatim radnik iz većeg polukruga isiječe manji polukrug i uklanja ga (crtež 15). Prečnik uklonjenog polukružnog dijela je 14 cm. Nađi obim dobijenog oblika. Koristi $\pi \approx \frac{22}{7}$.

5. Fabrika kancelarijskog materijala proizvodi spajalice (crtež 16). Koliko spajalica se može napraviti od čelične žice dužine 10 m?



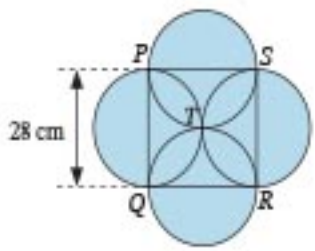
crtež 16

6. Na crtežu 17 prikazan je park u obliku pravougaonika sa dodatim polukrugom na jednoj strani i oduzetim drugim polukrugom na drugoj strani. Pronađi dužinu staze oko parka. Koristi $\pi \approx \frac{22}{7}$.

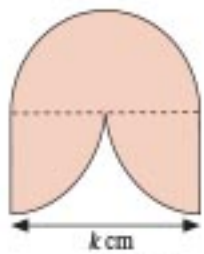


crtež 17

7. Žica je savijena da bi se formirao 2D oblik prikazan na crtežu 18. Oblik je sastavljen od četiri identične kružnice. Svaka kružnica siječe druge dvije. Četiri kružnice sijeku se u zajedničkoj tački T, koja je centar kvadrata *PQRS*. Nađi dužinu žice. Koristi $\pi \approx \frac{22}{7}$.



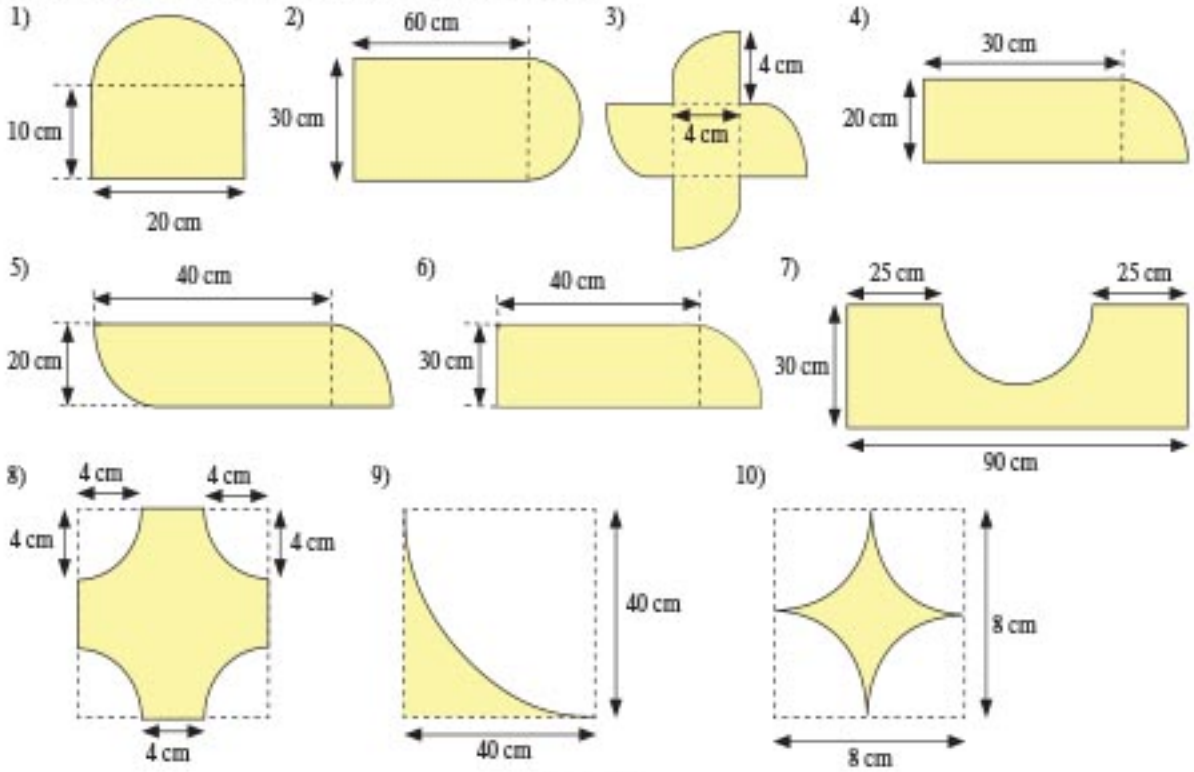
crtež 18



crtež 19

8. Obim 2D oblika datog na crtežu 19 je 97,29 dm. Nađi vrijednost *k*.

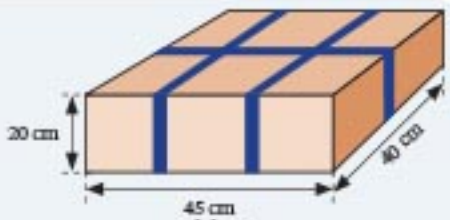
9. Izračunajte obim 2D oblika datih na crtežu 20:



crtež 20

Istraživanje

Kutija za laptop sa dimenzijama kao na slici 1 upakovana je sa 3 plastične trake, tako da se dva kraja svake trake preklapaju na mjestu gdje se spajaju za 5 cm. Izračunaj koliko je plastične trake potrebno za pakovanje 200 kutija?

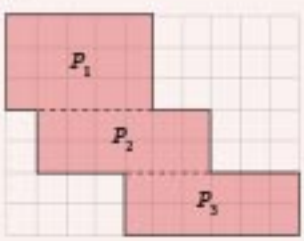


slika 1

6. POVRŠINA PARALELOGRAMA

Aktivnost

Kolika je površina *P* oblika na crtežu 1? Koje su površine oblika na crtežu 2? Da li su oblici podudarni?



crtež 1



crtež 2

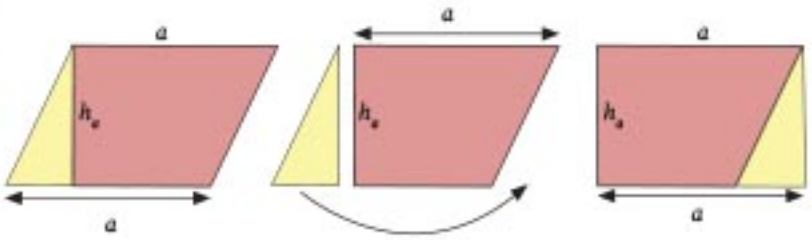
Oblici na slici 2 nisu podudarni, ali se sastoje od istog broja (16) podudarnih kvadratića. Za njih još kažemo da su **jednakopovršinski.**

U svakodnevnom životu često se nalazimo u situacijama kada treba da odredimo površinu 2D oblika. Pri tome se uvijek oslanjamo na sljedeća svojstva površine:

1. Mjera površine bilo kojeg 2D oblika je pozitivan broj.
2. Podudarni 2D oblici imaju jednake površine.
3. Ako je 2D oblik sastavljen od više dijelova koji se ne preklapaju, onda je njegova površina zbir površina tih dijelova.

Da bismo odredili površinu paralelograma, koristit ćemo crtež 3.

Paralelogram na crtežu „sječemo" duž jedne od njegovih visina i pomjeramo „isječeni" trougao dok ne dobijemo drugi paralelogram. Pošto je visina h_a normalna na stranicu a, dobijeni paralelogram je pravougaonik sa stranicama a i h_a. Njegova površina je proizvod dužina a i h_a. Dobijeni pravougaonik je jednake površine kao paralelogram.

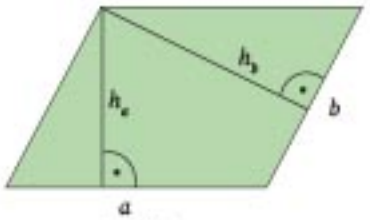


crtež 3

Skeniraj kod

Na crtežu 4 dat je paralelogram sa stranicama a i b.
Povučene su visine h_a и h_b, koje odgovaraju stranicama a i b.
Površina paralelograma jednaka je proizvodu dužine stranice i odgovarajuće visine, odnosno

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$



crtež 4

Površina paralelograma jednaka je proizvodu dužine bilo koje stranice i odgovarajuće visine.

Stoga se površina P paralelograma izračunava pomoću formula:

$$P = a \cdot h_a \text{ или } P = b \cdot h_b,$$

gdje su a i b stranice, a h_a i h_b odgovarajuće visine stranica paralelograma.

Primjer 1

Jedna stranica paralelograma je 5 cm, a visina spuštena na nju je 3cm. Kolika je površina paralelograma?

Prema uslovima u zadatku, imamo da je $a = 5$ cm и $h_a = 3$ cm.
Površina paralelograma je

$$P = a \cdot h_a = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$$

Aktivnost

Kako možeš iz formule $P = a \cdot h_a$ da izračunaš?
a) stranicu a, date P и h_a, b) visinu h_a, date a и P?

Primjer 2

Jedna stranica paralelograma dugačka je 15cm, a odgovarajuća visina je duga 8 cm.
a) Koliko iznosi visina koja odgovara drugoj stranici dužine 12 cm?
b) Uporedi dužine stranica i odgovarajuće visine. Šta primjećuješ?

a) Prema uslovima u zadatku, imamo da je $a = 15$ cm, $h_a = 8$ cm и $b = 12$ cm.
Površina paralelograma iznosi:
$P = a \cdot h_a = 15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$.
Prema formuli $P = b \cdot h_b$ dobijamo

$$h_b = \frac{P}{b} = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm}.$$

b) Primjećujemo da je visina do duže stranice paralelograma manja od visine do kraće stranice paralelograma.

Zadatak 1

Izračunaj visinu h_b paralelograma, ako su poznate dužine stranica $a = 4$ cm, $b = 5$ cm i dužina njegove visine $h_a = 3$ cm.

Zadatak 2

Dužine stranica paralelograma su 10 dm i 1,2 m. Koliko iznosi veća visina ako je kraća za 45 cm?

Zadatak 3

Kako će se promijeniti površina paralelograma ako:
a) jednu stranicu povećamo 2 puta, b) jednu stranicu smanjimo 3 puta.

Primjer 3

Poljoprivredno gazdinstvo planira da posije parcelu u obliku paralelograma sa jednim parom stranica dužine 1200 m i rastojanjem između njih 750 m. Ako sjeme košta 82,5 denara po hektaru, koliki će biti ukupni troškovi sjetve za cijelu parcelu?

Površina njive iznosi:
$P = 1200 \text{ m} \cdot 750 \text{ m} = 900\,000 \text{ m}^2 = 90 \text{ hm}^2$ $(1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2)$
Ukupni troškovi sjetve cijele parcele su $90 \cdot 82{,}5$ denara $= 7425$ denara.

Zadatak 4

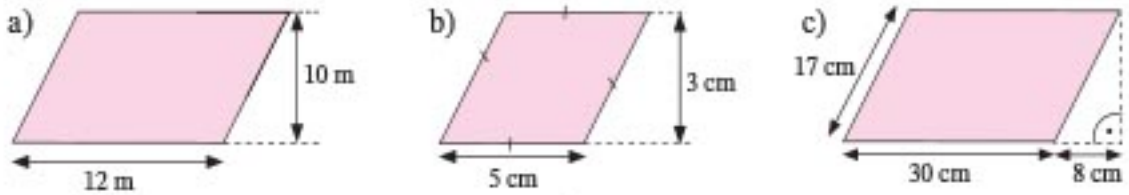
Građevinska firma treba da poploča dio parkinga koji ima oblik paralelograma. Dužina jedne stranice je 80 m, a rastojanje između stranica je 60 mm. Ako postavljanje pločica košta 125 denara po kvadratnom metru, kolika će biti ukupna cijena popločavanja cijelog parkinga?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Nacrtaj i popuni tabelu u kojoj su date vrijednosti za neke elemente paralelograma.

a	b	h_a	h_b	P
9 cm	12 cm			36 cm²
12 mm	7,5 mm	5 mm		
		9 cm	0,3 dm	18 cm²
12 cm			6 dm	24 dm²

2. Izračunaj površinu paralelograma na crtežu 5:



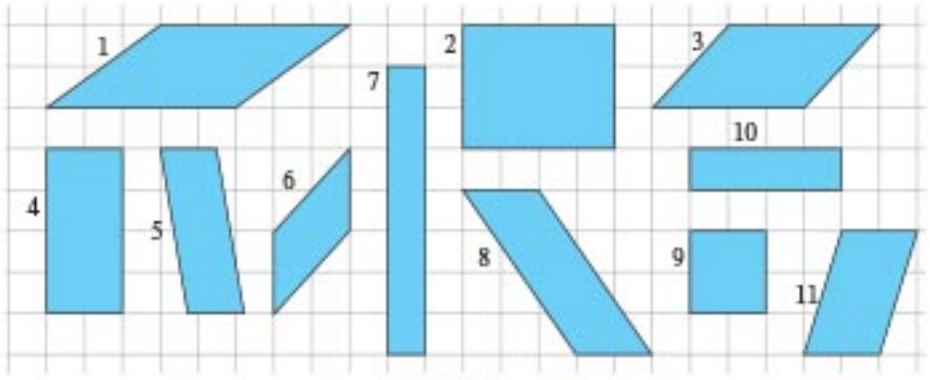
crtež 5

3. Površina paralelograma je 36 cm², a njegove visine su 4 cm i 6 cm. Izračunaj njegov obim.

4. Površina romba je 24 cm², njegov obim je 24 cm. Izračunaj visinu romba.

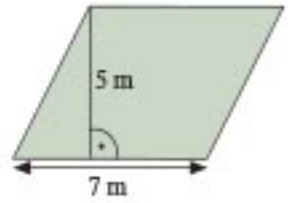
5. Izračunaj površinu romba obima 36 cm, ako je visina 2 cm manja od stranice.

6. Koji od paralelograma na crtežu 6 imaju jednaku površinu?



crtež 6

7. Nastavnik je zamolio svoje učenike da zapišu površinu paralelograma na crtežu 7. Mira je napisala 12 m², a Jovan 35 m. Oboje su pogriješili.
   a) Objasni grešku za svakog od njih.
   b) Napiši tačan odgovor.



crtež 7

8. Said ima njivu u obliku romba sa dužinom ograde od 96 m i rastojanjem između suprotnih stranica od 18 m. Ima vreću đubriva od 15 kg sa etiketom „Koristite 35 g đubriva po m²". Da li Said ima dovoljno đubriva za cijelu njivu?

9. Krojačica treba da napravi zavjesu u obliku paralelograma. Dužina donje stranice zavjese je 2,4 m, a odgovarajuća visina je 1,8 m. Kolika je površina tkanine koja joj je potrebna da bi sašila zavjesu?

10. Majstor izrađuje zidnu dekoraciju od pločica u obliku paralelograma. Svaka pločica ima dužinu stranice od 45 cm, a odgovarajuća visina je 30 cm.
    a) Izračunaj površinu jedne pločice u kvadratnim centimetrima i u kvadratnim metrima.
    b) Ako zid koji treba da se pokrije ima površinu od 4,5 m², koliko je pločica potrebno za cijeli zid?
    c) Ako jedna pločica košta 85 denara, kolika će biti ukupna suma za postavljanje svih pločica?

Istraživanje

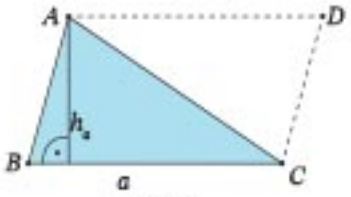
1. Dat je kvadrat *MNPQ*. Konstruši paralelogram sa stranicom *MN* i oštrim uglom od 60° koji ima istu površinu kao i kvadrat. Objasni postupak.
2. Koristeći geometrijski softver, nacrtaj paralelogram, odredi njegovu površinu i istraži kako se ona mijenja sa promjenom stranica i visina.
   Nacrtaj još paralelograma jednake površine sa prvim nacrtanim paralelogramom.

7. POVRŠINA TROUGLA

Aktivnost

Nacrtaj paralelogram *ABCD* i povuci jednu njegovu dijagonalu i dvije visine.
Da li su dobijeni trouglovi podudarni i zašto? Označi po jednu visinu svakog od dobijenih trouglova.

Trougao ABC sa osnovom a i odgovarajućom visinom h_a je „docrtan" do paralelograma $ABCD$ (crtež 1). Sastoji se od dva podudarna trougla ABC i CDA. Zato je površina svakog od njih jednaka polovini površine paralelograma $ABCD$:



crtež 1

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a .$$

P trougla sa osnovom a i visinom h_a je

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

Na sličan način možemo zaključiti da, za druge dvije stranice b и c, i odgovarajuće visine h_b и h_c važe formule:

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ и } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

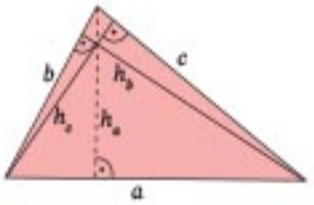
Skeniraj kod za površinu trougla.

Površina trougla jednaka je poluproizvodu dužina bilo koje stranice i odgovarajuće visine.

Prema tome, površina trougla P izračunava se pomoću formula (crtež 2):

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ или } P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ или } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

gdje su a, b i c stranice, a h_a, h_b и h_c odgovarajuće visine stranica trougla.



crtež 2

Primjer 1

Izračunaj površinu trougla sa stranicom $a = 18$ cm i visinom $h_a = 10$ cm.

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{18\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm}}{2} = 90\ \text{cm}^2.$$

Zadatak 1

Izračunaj površinu trougla, ako je dato:

a) $b = 1{,}2$ dm и $h_b = 0{,}8$ dm,

b) $c = 3\frac{2}{5}$ m и $h_c = 7{,}6$ m.

Aktivnost

Kako možeš iz formule $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ da izračunaš:

a) stranicu a, date P и h_a, b) visinu h_a, date a i P?

Primjer 2

Izračunaj dužinu stranice trougla površine $P = 39\ \text{cm}^2$, ako je visina spuštena na stranicu a duga 7,8 cm.

Prema uslovima u zadatku imamo da je $h_a = 7{,}8\ \text{cm}$ i $P = 39\ \text{cm}^2$. Prema formuli $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ za stranicu a dobijamo

$$a = \frac{2P}{h_a} = \frac{2 \cdot 39\text{cm}^2}{7{,}8\text{cm}} = 10\,\text{cm}.$$

Zadatak 2

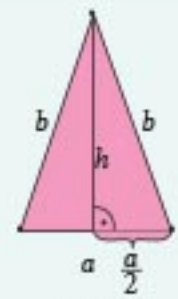
Od jednog trouglastog mozaika, Anja sklapa novi, u obliku trougla sa istom površinom. Ako je dužina stranice prvog mozaika 9 cm, a odgovarajuća visina 6 cm, kolika će biti visina drugog mozaika, ako mu je stranica 12 cm?

Primjer 3

Izračunaj površinu jednakokrakog trougla sa obimom $L = 36$ cm i osnovicom $a = 8$ cm (crtež 3).

Prema formuli za izračunavanje obima jednakokrakog trougla $L = a + 2b$, dobijamo da

$$b = \frac{L - a}{2} = \frac{36\text{cm} - 8\text{cm}}{2} = 14\ \text{cm}.$$



crtež 3

Primjenom Pitagorine teoreme, za visinu h spuštenu na stranicu a nalazimo da je

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(14\text{cm})^2 - (4\text{cm})^2} = \sqrt{180\text{cm}^2} \approx 13{,}4\,\text{cm}.$$

Vrijednost $\sqrt{180}$ izračunava se pomoću kalkulatora na odgovarajućem dugmetu. Uzimamo približnu vrijednost, u ovom slučaju zaokruženu na jednu decimalu. Tražena površina jednakokrakog trougla je

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{8\text{cm} \cdot 13{,}4\text{cm}}{2} = 53{,}6\ \text{cm}^2.$$

Zadatak 3

Travnjak ima oblik jednakokrakog trougla sa stranicama 5 m i visinom do osnovice 3 m. Koliko vode je potrebno za zalijevanje tokom jedne sedmice, ako površina od 3 m^2 zahtijeva 5 l vode svakog dana?

Zadatak 4

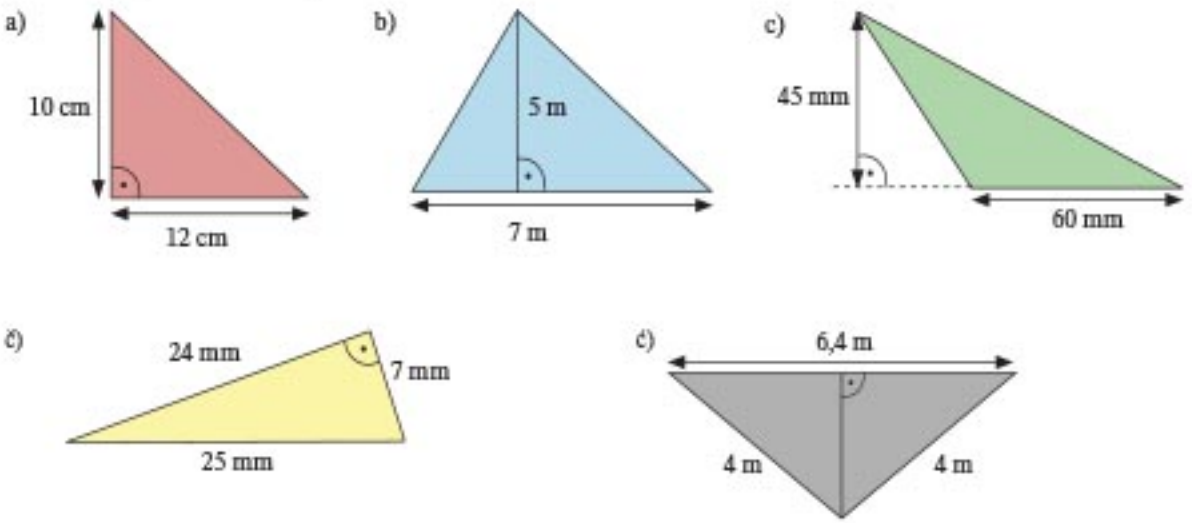
Izračunaj površinu platna potrebnog za izradu jedra broda (crtež 4). Koliko će koštati materijal ako 1 m² košta 326 denara?



crtež 4

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj površinu trouglova na crtežu 5:



crtež 5

2. Za dati trougao ABC, izračunaj:

   a) b, ako je $P = 64$ cm² и $h_b = 8$ cm,

   b) h_c, ako je $P = 8$ cm² и $c = 3{,}2$ cm.

3. Paralelogram sa stranicom a i odgovarajućom visinom h_a i trougao sa stranicom $2a$ imaju jednake površine. Kolika je visina trougla?

4. Kako će se promijeniti površina trougla ako se stranica:

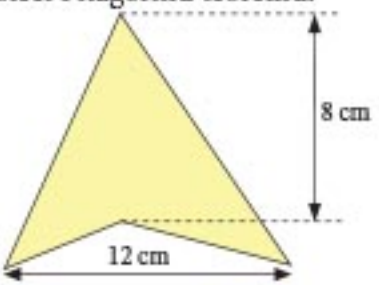
   a) poveća 3 puta, a odgovarajuća visina ostane nepromijenjena,

   b) smanji 6 puta, a odgovarajuća visina poveća 2 puta.

5. Izračunaj obim pravouglog trougla ako je njegova površina 54 cm² i jedna od njegovih kateta je 2 cm.

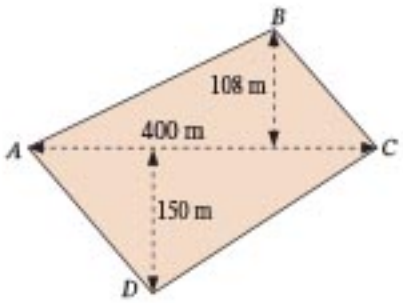
6. Izvedi formulu za površinu jednakostraničnog trougla koristeći Pitagorinu teoremu. Izračunaj njegovu površinu.

7. Amblem jedne škole je u obliku datom na crtežu *6*. Izračunaj njegovu površinu.



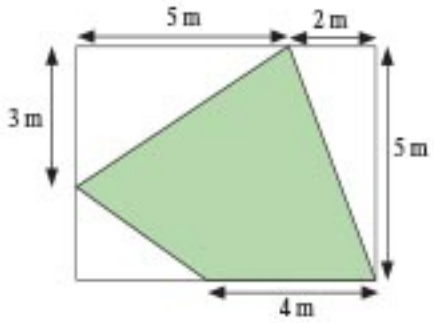
crtež 6

8. Na crtežu 7 prikazana je njiva jednog poljoprivrednika. On hoće da je proda po cijeni od 1280 denara po kvadratnom metru.
Izračunaj cijenu njive.



crtež 7

9. Izračunaj koliko će novca biti potrebno za sjeme za njivu u obliku crteža 8, ako sjeme za 1 m² košta 37 denara.



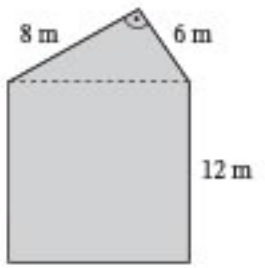
crtež 8

10. Ti si dio tima koji treba da asfaltira parking blizu tvoje škole. Parking ima petougaoni oblik, kao što je prikazano na crtežu *9*.

a) Koliko će koštati ukupno asfaltiranje ako je cijena po m² 2350 denara?

b) Pored tri duže stranice parkinga planiran je mali zeleni pojas, koji će biti širok 1 m, sa travom i drugim ukrasnim biljkama. Koliko treba da se doplati za zeleni pojas ako 1 m² hortikulturnog uređenja košta 1200 denara?

c) Predloži druga moguća rješenja za prostor (osvjetljenje, automat za vodu, itd.)



crtež 9

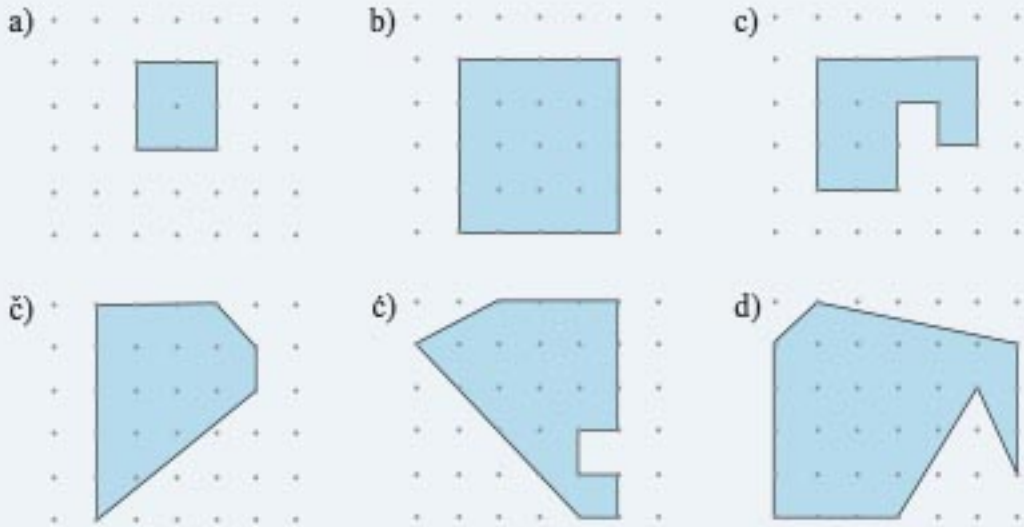
Istraživanje

Razgledaj 2 D oblik nacrtan na papiru sa tačkicama postavljenim na tjemenima malih kvadrata. Tačke koje leže na stranicama 2D oblika su granične tačke, dok su one koje leže unutar 2D oblika unutrašnje tačke.
Na crtežu *10*, broj graničnih tačaka $G = 14$, dok je broj unutrašnjih tačaka $V = 3$.


crtež 10

Pokušaj da popuniš datu tabelu prema crtežu 11.

2D oblik	G	$\frac{G}{2}$	V	$\frac{G}{2}+V$	Površina P



crtež 11

Razgledaj dvije posljednje kolone tabele i predloži pravilo koje povezuje P, G i V. Nacrtaj nekoliko različitih 2D oblika na papiru sa tačkama i provjeri ispravnost pravila.

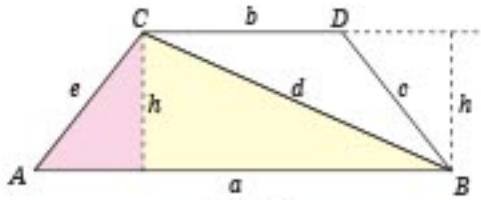
8. POVRŠINA TRAPEZA

Aktivnost

Nacrtaj trapez na papiru i označi njegove osnovice sa a i b, a visinu sa h. Presijeci trapez dužinom jedne od njegovih dijagonala da bi ga podijelio/la na dva trougla.

a) Kolika je visina trouglova, spuštena prema stranici a odnosno prema stranici b?

b) Izračunaj površinu oba trougla.



crtež 1

Površina trapeza *ABCD*, prikazanog na crtežu 1, zbir je površina trougla *ABC* i trougla *BDC*, odnosno

$$P = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta BDC} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Površina trapeza jednaka je proizvodu polovine zbira dužina njegovih osnovica i visine.

Skeniraj kod.

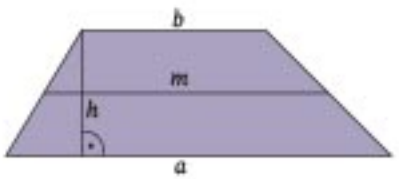
Znači, površinu P trapeza izračunavamo prema formuli:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

gdje su a i b osnovice, a h je visina trapeza.

Pošto je poluzbir dužina osnovica trapeza jednak dužini srednje linije trapeza $m = \frac{a+b}{2}$, gornja formula za površinu trapeza ima oblik

$$P = m \cdot h.$$



crtež 2

Primjer 1

Izračunaj površinu trapeza, sa osnovicama $a = 2{,}5$ dm i $b = 8$ dm, i visinom $h = 3$ dm.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2{,}5\,\text{dm} + 8\,\text{dm}}{2} \cdot 3\,\text{dm} = 15{,}75\ \text{dm}^2.$$

Zadatak 1

Izračunaj površinu trapeza sa srednjom linijom $m = 12$ cm i visinom $h = 0{,}72$ dm.

Primjer 2

Data je jedna osnovica $a = 13$ cm, površina $P = 50$ cm^2 i visina $h = 5$ cm trapeza. Izračunaj drugu osnovicu.

Iz formule za izračunavanje površine trapeza $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ dobijamo

$$b = \frac{2P}{h} - a = \frac{2 \cdot 50\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}} - 13\,\text{cm} = 7\,\text{cm}.$$

Zadatak 2

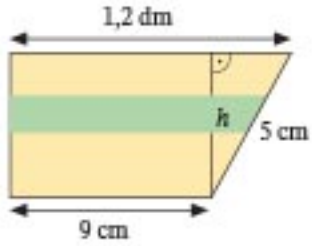
Izračunaj srednju liniju trapeza površine 1800 cm^2 i visine 9 dm.

Zadatak 3

Osnovice trapeza su 8,5 cm i 5,8 cm, a njegova površina je 42,9 cm^2.
Izračunaj visinu trapeza.

Primjer 3

Lirim želi da napravi papirne zastavice u obliku pravouglog trapeza za navijače na školskoj utakmici *(crtež 3)*.
Osnovice su 1,2 dm i 9 cm, a duži krak je 5 cm.
Koliko kvadratnih centimetara papira mu je potrebno da napravi 40 takvih zastavica?



crtež 3

Prvo, pretvorimo sve dužine u iste jedinice.
1,2 dm = 12 cm.
Zastava je u obliku trapeza.
Prema Pitagorinoj teoremi, za visinu trapeza dobijamo

$$h = \sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (12\,\text{cm} - 9\,\text{cm})^2} = \sqrt{25\,\text{cm}^2 - 9\,\text{cm}^2} = \sqrt{16\,\text{cm}^2} = 4\,\text{cm}.$$

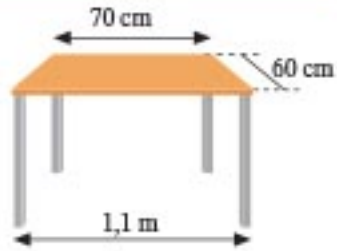
Površina trapeza iznosi

$$P = \frac{12\,\text{cm} + 9\,\text{cm}}{2} \cdot 4\,\text{cm} = \frac{21\,\text{cm}}{2} \cdot 4\,\text{cm} = 42\ \text{cm}^2.$$

Lirimu je potrebno 40 · 42 cm^2 = 1680 cm^2 papira.

Zadatak 4

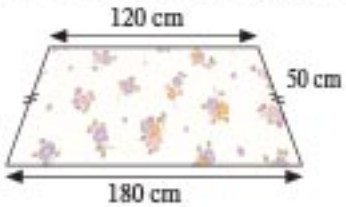
U učionici je bilo 25 klupa sa drvenom površinom u obliku jednakokrakog trapeza *(crtež 4)*.
Drvenu površinu potrebno je premazati zaštitnom bojom. Koliko kvadratnih metara ukupno treba premazati bojom?



crtež 4

Zadatak 5

Vesna želi da napravi suknju od materijala na crtežu 5. Izračunaj površinu materijala.

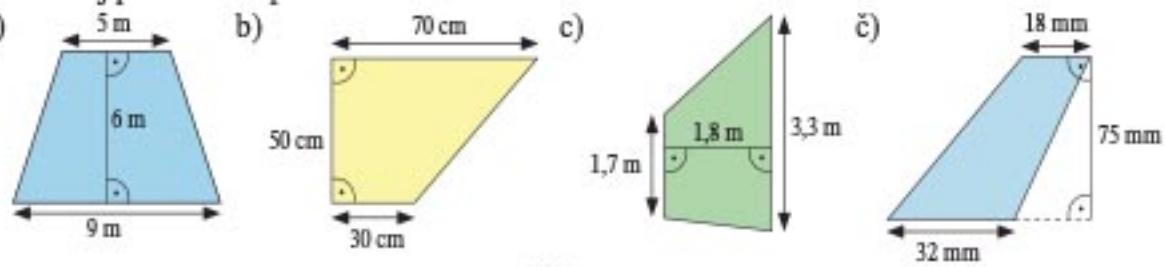


crtež 5

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj površinu trapeza datih na crtežu 6.

a) b) c) č)



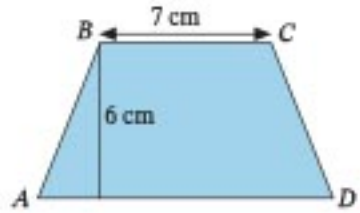
crtež 6

2. Nacrtaj u svoju svesku i popuni tabelu sa potrebnim dimenzijama za trapez:

a	42 cm	8 dm		35 cm
b	34 cm	6 dm	20 cm	
h	25 cm		9 cm	12 cm
P		42 dm^2	225 cm^2	336 cm^2

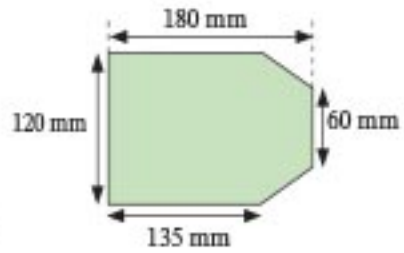
3. Izračunaj srednju liniju trapeza površine 280 dm^2 i visine 14 dm.

4. Izračunaj dužinu stranice AD trapeza $ABCD$ na crtežu 7, ako je površina $P = 57$ cm^2.



crtež 7

5. Tanki komad metala u mašinskoj radionici ima oblik i dimenzije prikazane na crtežu 8. Odredi površinu jedne strane metalnog komada.



crtež 8

6. Jedno polje, koje je imalo oblik trapeza sa osnovicama 142 m i 86 m i visinom 42 m, bilo je zasijano pamukom. Prosječno je sa 1 dekara ubrano 95 kg pamuka. Koliko kilograma pamuka je ubrano sa cijelog polja?
Uputstvo: 1 dekar = 10 ari.

7. Elena hoće da uredi dio dvorišta ispred svoje kuće cvjetnom površinom u obliku trapeza sa osnovicama 6 m i 3 m i visinom 2,5 m. Elena želi da posadi cvijeće tako da na svakom kvadratnom metru bude 12 sadnica.

a) Koliko sadnica će joj biti potrebno za cijelu površinu?

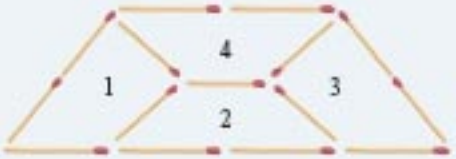
b) Ako jedna sadnica košta 50 denara, koliki će biti njen ukupni trošak?

c) Koliko metara crijeva će joj biti potrebno ako postavi sistem za navodnjavanje koji prolazi duž obima trapeza?

č) Ako svaka sadnica apsorbuje 0,2 kg ugljen-dioksida dnevno, koliko će ukupnog ugljen-dioksida apsorbovati svi zasađeni cvjetovi za jedan dan?

Istraživanje

Crtež 9 prikazuje trapez napravljen od 10 šibica. Podijeli trapez na četiri podudarna trapeza koristeći pet drugih šibica.

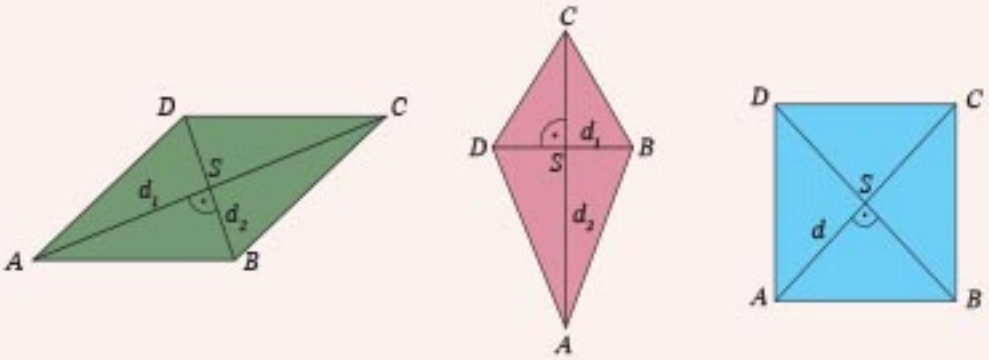


crtež 9

9. POVRŠINA ROMBA, DELTOIDA I KVADRATA

Aktivnost

Nacrtaj romb, deltoid i kvadrat. Nacrtaj njihove dijagonale. Koji je relativni položaj dijagonala u svakom od nacrtanih četverouglova?



crtež 1

Dijagonala AC je osa simetrije za svaki od četverouglova na crtežu 1. Prema tome, za svaki od četverouglova $\Delta ABC \cong \Delta ADC$. To znači da je

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC}.$$

Osim toga, površina svakog četverougla je zbir površina dva trougla, odnosno

$$P_{ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ADC} = 2P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BS}}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{d_1 \cdot \frac{d_2}{2}}{\cancel{2}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Površina romba, deltoida i kvadrata jednaka je poluproizvodu dužina njihovih dijagonala.

Prema tome, površina P romba i deltoida izračunava se prema formuli:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

gdje su d_1 i d_2 dijagonale romba odnosno deltoida.

Konkretno, površina kvadrata izračunava se prema formuli:

$$P = \frac{d^2}{2},$$

gdje je d dijagonala kvadrata.

Primjer 1

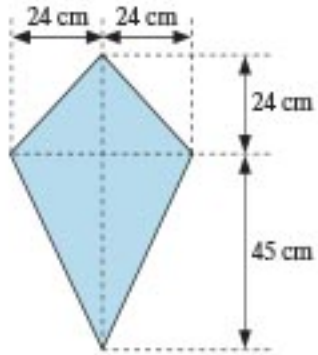
Izračunaj površinu romba sa dijagonalama $d_1 = 4{,}5$ cm i $d_2 = 8{,}3$ cm.

Površina romba iznosi

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot 8{,}3\,\text{cm}}{2} = 18{,}675\ \text{cm}^2.$$

Zadatak 1

Izračunaj površinu letjelice u obliku deltoida date na crtežu 2.



crtež 2

Aktivnost

Kako možeš iz formule za površinu deltoida $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ izračunati dužinu jedne dijagonale, ako su date površina P i dužina druge dijagonale?

Primjer 2

Izračunaj dužinu nepoznate dijagonale deltoida, ako je njegova površina 90 cm², a druga dijagonala je dugačka 7,5 cm.

Prema formuli za izračunavanje površine deltoida $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ dobijamo da je

$$d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{2 \cdot 90\,\text{cm}^2}{7{,}5\,\text{cm}} = 24\ \text{cm}.$$

Zadatak 2

Izračunaj dužinu dijagonale kvadrata površine 150 cm².

Primjer 3

Izračunaj površinu romba sa dužinom stranice 5 cm, ako je jedna od dijagonala dugačka 8 cm.

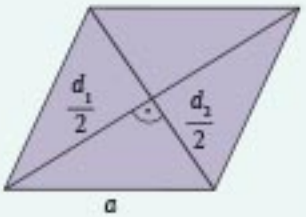
Dijagonale romba su jedna na drugu normalne *(crtež 3)*.
Primjenom Pitagorine teoreme dobijamo

$$\frac{d_2}{2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-\left(\frac{8\,\text{cm}}{2}\right)^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}$$

iz čega nalazimo da je $d_2 = 3\,\text{cm}\cdot 2 = 6\,\text{cm}$.

Površina romba iznosi

$$P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{8\,\text{cm}\cdot 6\,\text{cm}}{2}=24\,\text{cm}^2.$$



crtež 3

Zadatak 3

Izračunaj koliko je metara žice potrebno da se ogradi polje u obliku romba površine 36 dm², ako je jedna od njegovih dijagonala 9 dm.

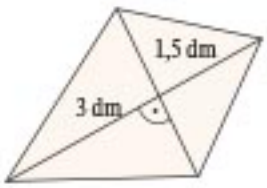
Zadatak 4

Izračunaj koliko je kvadratnih pločica sa stranicom 60 cm potrebno da se poploča kvadrat koji ima oblik deltoida. Dvije duže stranice kvadrata su 50 m i zaklapaju ugao od 60°, a kraće stranice zaklapaju pravi ugao.

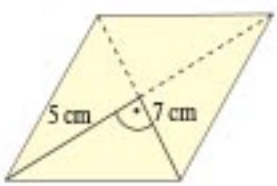
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj površinu četverouglova datih na crtežu 4:

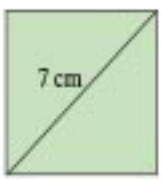
a)



b)



c)



crtež 4

2. Izračunaj visinu romba čije su dijagonale dugačke 16 cm i 12 cm.

3. Površina deltoida je 9 dm^2, a jedna od njegovih dijagonala je 1,5 dm. Kolika je druga dijagonala deltoida?

4. Deltoid i kvadrat imaju jednake površine. Izračunaj dijagonalu kvadrata, ako su dijagonale deltoida 16 dm i 4 cm.

5. Tea bi htjela da napravi dekorativni poster u obliku deltoida sa stranicama 28 cm i 46 cm. Jedna dijagonala, koja nije osa simetrije, duga je 35 cm. Kolika je površina postera?
Napomena: Koristi kalkulator da bi izračunao/la kvadratni korijen.

6. Đaci osnovne škole odlučili su da dizajniraju mini solarni panel za školu. Svaki solarni panel je u obliku romba sa dijagonalama od 80 cm i 60 cm.
   a) Ako je za pokrivanje krova školskog paviljona potrebno 250 crjepova, kolika je ukupna površina koju će pokriti svi crjepovi?
   b) Ako jedan kvadratni metar površine pokrivene solarnim panelima stvara 15 Wh energije dnevno, koliko će energije stvoriti ukupna površina za jedan dan?

Istraživanje

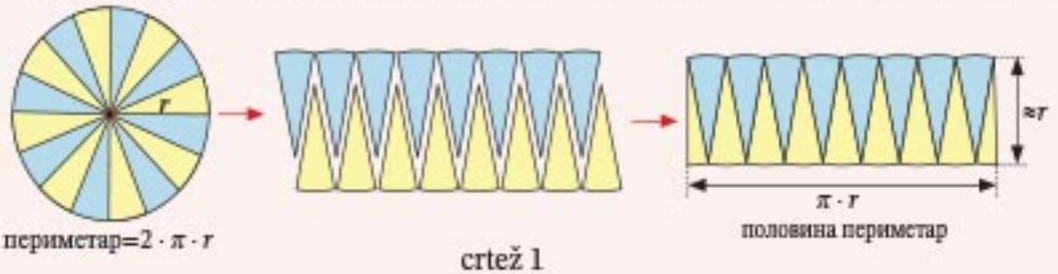
1. Na milimetarskom papiru nacrtaj 2 duži koje se sijeku pod pravim uglom. Zatim uzmi njihove krajnje tačke kao tjemena četverougla.
   a) Izračunaj površinu četverougla brojanjem kvadrata na milimetarskom papiru.
   b) Izračunaj površinu koristeći formulu za četverougao sa međusobno normalnim dijagonalama. Uporedi oba rezultata. Šta primjećuješ?
   c) Nacrtaj i druge četverouglove na milimetarskom papiru. Izračunaj njihovu površinu brojanjem kvadrata na milimetarskom papiru. Provjeri izračunavanjem koristeći formulu za površinu četverougla sa međusobno normalnim dijagonalama.

2. Objasni kako se površina trapeza sa normalnim dijagonalama može izračunati dijeljenjem trapeza na dva trougla?

10. POVRŠINA KRUGA

Aktivnost

Isijeci krug od papira, podijeli ga na 16 jednakih dijelova, a zatim sastavi oblik kao na crtežu 1.



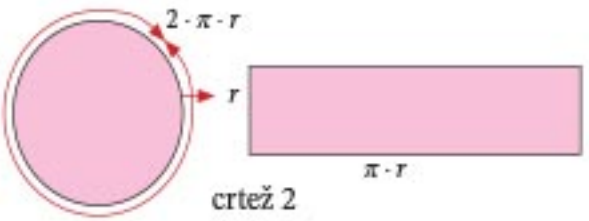
crtež 1

Na šta te podsjeća dobijeni oblik? Ima istu površinu kao krug.
Kako ćeš odrediti njegovu površinu?

U svakodnevnom životu često se susrećemo sa potrebom da izračunamo površinu kruga ili njegovih dijelova.

Skeniraj kod i nađi drugi način da dođeš do formule za površinu kruga.

Zamislimo da je krug poluprečnika r podijeljen, na primjer, na 1000 jednakih dijelova koje ćemo rasporediti kao gore. Dobijeni oblik bit će još „bliži" pravougaoniku, tako da će njegova površina biti $P \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$ (crtež 2).



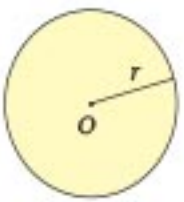
crtež 2

Površina kruga jednaka je proizvodu broja π i kvadrata njegovog poluprečnika.

Prema tome, površina kruga P izračunava se prema formuli:

$$P = \pi r^2,$$

gdje je r poluprečnik kruga (crtež 3).



crtež 3

Primjer 1

Izračunaj površinu kruga sa poluprečnikom od 4 cm.

Zamjenom datih vrijednosti u formulu za izračunavanje površine kruga, dobijamo

$$P = \pi r^2 \approx 3{,}14 \cdot (4\text{ cm})^2 = 50{,}24\text{ cm}^2.$$

Veoma često pišemo i $P = \pi r^2 = (4\text{ cm})^2 \cdot \pi = 16\pi\text{ cm}^2$.

Zadatak 1

Izračunaj površinu kruga sa:
a) poluprečnikom 1 dm, b) poluprečnikom 3,2 m, c) prečnikom 10 cm.

Aktivnost

Kako možeš iz formule $P = \pi r^2$ da izračunaš poluprečnik r, ako je data površina P?

Primjer 2

Izračunaj prečnik kruga površine $P = 113{,}04\ \text{cm}^2$.

Koristeći formulu za izračunavanje površine kruga, nalazimo da

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{113{,}04\,\text{cm}^2}{3{,}14}} = \sqrt{36\,\text{cm}^2} = 6\ \text{cm}.$$

Tada za prečnik dobijamo $d = 2r \approx 2 \cdot 6\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$.

Zadatak 2

Izračunaj prečnik pleha za palačinke, ako je površina jedne palačinke pečene u plehu $1962{,}5\ \text{cm}^2$.

Primjer 3

Izračunaj površinu kruga sa obimom $L = 4\pi$ cm.

Iz formule za dužinu kruga $L = 2r\pi$, nalazimo da je $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4\pi\,\text{cm}}{2\pi} = 2\ \text{cm}$.

Zatim za površinu kruga dobijamo $P = \pi \cdot r^2 = (2\ \text{cm})^2 \cdot \pi = 4\pi\ \text{cm}^2$.

Zadatak 3

Izračunaj površinu kruga čiji je obim 25,12 dm.

Zadatak 4

Izračunaj obim kruga površine $314\ \text{dm}^2$.

Zadatak 5

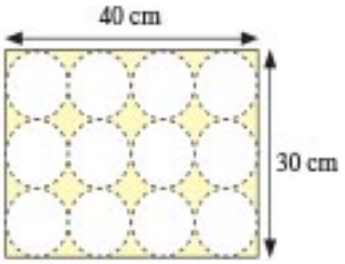
Koliko puta treba povećati poluprečnik jednog kruga da bi se njegova površina povećala 25 puta?

Zadatak 6

Kada vodeni balon pukne na zemlji, stvara krug vode prečnika približno 26 cm.
Izračunaj približnu površinu površine zemlje koja je mokra.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Koliko puta će se povećati površina kruga ako se njegov poluprečnik poveća:
   a) 3 puta, b) 7 puta?
2. Kružni sto prečnika 80 cm pokriven je kvadratnim stolnjakom površine 1600 cm^2.
3. Da li je sto potpuno pokriven stolnjakom?
   Data su dva kruga poluprečnika 6 cm i 4 cm. Nađi poluprečnik kruga čija je površina jednaka:
   a) zbiru površina dva kruga,
   b) razlici površina dva kruga.
4. Magarac je vezan za stub konopcem dužine 3,6 m. Na kolikoj površini se magarac može kretati?
5. Dvije kružnice poluprečnika $r_1 = 5{,}4$ cm i $r_2 = 3$ cm dodiruju se iznutra.
   Izračunaj površinu dijela ravni koji se nalazi između te dvije kružnice.
6. Jan radi u poslastičarnici gdje se svakodnevno prave kolači kružnog oblika koji se sijeku od komada tijesta dimenzija 30 cm × 40 cm, kao što je prikazano na crtežu 4. Izračunaj površinu neisječenog dijela komada tijesta.



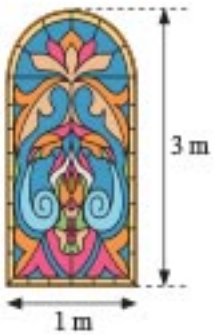
crtež 4

7. Izračunaj površinu dijela slagalice *(crtež 5)* i zaokruži rješenje na najbliži kvadratni milimetar.



crtež 5

8. Cijena vitraža je 1150 dinara za 1 m^2.
   Maja je arhitekta i projektuje prostor u koji postavlja 4 prozora sa vitražom *(crtež 6)*.
   Njen budžet je 14000 dinara.
   Provjeri da li Maja ima dovoljno sredstava da realizuje svoj projekat.



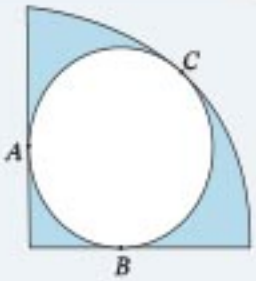
crtež 6

Istraživanje

Krug poluprečnika r upisan je u četvrtinu kruga poluprečnika R, tako da se dodiruje u tačkama A, B i C (crtež 7)

a) Nađi odnos između poluprečnika R i r.

b) Nađi odnos površine obojenog oblika prema površini bijelog kruga.



crtež 7

11. POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA, KRUŽNOG ODSJEČKA I KRUŽNOG PRSTENA

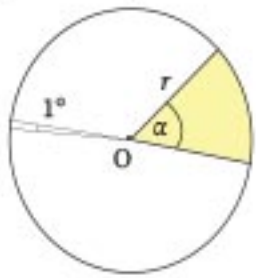
Aktivnost

a) Nacrtaj dva kruga sa proizvoljnim poluprečnikom. U jednom nacrtaj kružni odsječak, a u drugom kružni isječak. Zatim označi centralne uglove i odgovarajuće kružne lukove.

b) Nacrtaj dvije koncentrične kružnice i oboji prostor među njima. Imenuj dobijeni oblik.

Kružni isječak u krugu poluprečnika r, čiji je centralni ugao 1° (slika 1), ima površinu jednaku $\frac{1}{360}$ površine kruga, odnosno

$$P_{1^\circ} = \frac{\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2 \cdot 1^\circ}{360^\circ}.$$



crtež 1

Kružni isječak u krugu poluprečnika r, čiji je centralni ugao 2°, ima dva puta veću površinu od kružnog isječka čiji je centralni ugao 1°, odnosno: $P_{2^\circ} = P_{1^\circ} \cdot 2$. Prema tome, dobijamo da je

$$P_{2^\circ} = \frac{\pi r^2 \cdot 1^\circ}{360^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r^2 \cdot 2^\circ}{360^\circ}.$$

Razmišljajući na ovaj način, možemo zaključiti da kružni isječak u krugu poluprečnika r, čiji centralni ugao α ima površinu

$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}.$$

Znamo da je dužina luka koji odgovara kružnom isječku $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$, pa se formula za izračunavanje površine kružnog isječka može napisati u obliku

$$P = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{r}{2} = \frac{l \cdot r}{2}.$$

Površina kružnog isječka jednaka je poluproizvodu dužine odgovarajućeg kružnog luka i poluprečnika.

Zato se površina kružnog isječka P izračunava prema formuli:

$$P=\frac{l\cdot r}{2},$$

gdje je l dužina odgovarajućeg kružnog luka, a r je poluprečnik kruga.

Primjer 1

Izračunaj površinu kružnog isječka koji odgovara centralnom uglu od 57° u krugu poluprečnika 6 cm.

Zamjenom mjernih brojeva poluprečnika r i ugla a u formuli za kružni isječak, dobijamo:

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}\approx\frac{3{,}14\cdot(6\,\text{cm})^2\cdot 57^\circ}{360^\circ}=17{,}898\ \text{cm}^2.$$

Zadatak 1

Izračunaj površinu kružnog isječka, ako je $r = 5$ cm i $l = 6{,}8$ cm.

Aktivnost

Kako iz formule $P=\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}$ možeš da izračunaš:

a) poluprečnik r, ako su dati P i α,

b) centralni ugao α, ako su dati r i P?

Primjer 2

Kružni isječak poluprečnika 7 cm ima površinu od 64,2 cm². Izračunaj veličinu centralnog ugla isječka.

Prema formuli za izračunavanje površine kružnog isječka, za ugao α dobijamo

$$\alpha=\frac{360^\circ P}{\pi r^2}\approx\frac{360^\circ\cdot 64{,}2\,\text{cm}^2}{3{,}14\cdot(7\,\text{cm})^2}=150^\circ.$$

Zadatak 2

U pekari „Slatka tačka" prodaju se kriške pite u obliku kružnog isječka. Cijela pita ima kružni oblik sa poluprečnikom od 20 cm i siječe se na 8 jednakih dijelova.

a) Koliki je centralni ugao jednog komada pite?

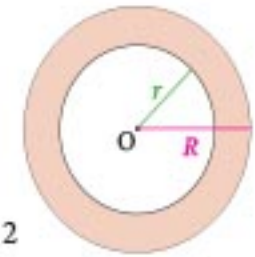
b) Kolika je površina jednog komada pite?

Zadatak 3

Koliki je poluprečnik kruga u kojem centralni ugao od 70° odgovara isječku površine 15,26 cm²?

Na crtežu *2* prikazana su dva koncentrična kruga.
Označi polupreč nik velikog kruga sa R, a polupreč nik malog kruga sa r.
Površinu kružnog prstena dobit ćeš ako od površine velikog kruga oduzmemo površinu malog kruga, odnosno

$$P = \pi R^2 - \pi r^2, \quad P = \pi\left(R^2 - r^2\right).$$



crtež 2

Primjer 3

Izračunaj površinu kružnog prstena, ako su polupreč nici krugova koji ga okružuju $R = 9$ cm i $r = 5{,}7$ cm.

Prema formuli za površinu kružnog prstena, nalazimo da je

$$P = \pi(R^2 - r^2) \approx 3{,}14 \cdot \left((9\,\text{cm})^2 - (5{,}7\,\text{cm})^2\right) = 152{,}3214\,\text{cm}^2.$$

Zadatak 4

U sredini školskog dvorišta nalazi se fontana kružnog oblika. Oko fontane učenici će napraviti cvjetnu leju u obliku kružnog prstena. Spoljašnji polupreč nik cvjetne leje je 3 m, a unutrašnji polupreč nik (do ivice fontane) je 1,5 m.

a) Izračunaj površinu cvjetne leje.

b) Ako je za uređenje 1 m² potrebno 5 biljaka, koliko će biljaka biti potrebno za cijelu cvjetnu leju?

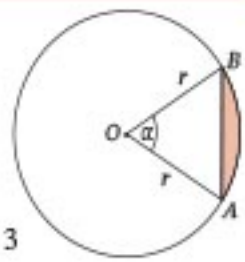
Zadatak 5

Dužine dva koncentrična kruga su 4π cm i 10π cm. Izračunaj površinu kružnog prstena ograničenog krugovima.

Zadatak 6

Dvije kružnice sa polupreč nicima $r_1 = 5{,}4$ cm i $r2 = 3$ cm dodiruju se sa unutrašnje strane. Izračunaj površinu dijela ravni ograničenog krugovima.

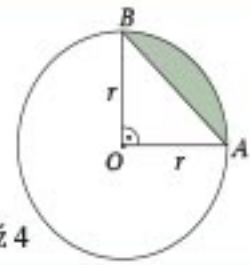
Površina kružnog odsječka može se izračunati kao razlika između površine kružnog isječka sa centralnim uglom α i površine jednakokrakog trougla ABO *(crtež 3)*.



crtež 3

Primjer 4

Izračunaj površinu kružnog odsječka sa tetivom AB, ako je centralni ugao $\alpha = 90°$ i polupreč nik kruga je $r = 13$ cm *(crtež 4)*.



crtež 4

Površina kružnog odsječka iznosi

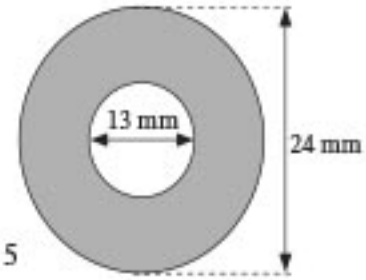
$$P_{\text{odsječak}} = P_{\text{isječak}} - P_{\triangle ABO} \approx \frac{3{,}14 \cdot (13\,\text{cm})^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{13\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm}}{2} = 48{,}165\ \text{cm}^2.$$

Zadatak 7

Izračunaj površinu kružnog odsječka u krugu poluprečnika $r = 9$ cm, ako je dužina odgovarajućeg kružnog luka $l = 14{,}13$ cm.

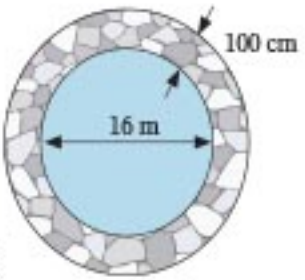
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Izračunaj površinu kružnog isječka, ako su dati:
   a) $r = 3$ cm i $\alpha = 30°$, b) $r = 4{,}5$ dm i $\alpha = 45° 30'$, c) $r = 5$ cm i $l = 6{,}8$ cm.
2. Koliki dio površine kruga predstavlja kružni isječak čiji je centralni ugao:
   a) 45°, b) 60°, c) 90°, č) 120°?
3. Površina kružnog isječka je:
   a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{3}{4}$, č) $\frac{5}{9}$,
   površine kruga. Koliki je centralni ugao koji odgovara kružnom isječku?
4. Površine dva koncentrična kruga su 4π cm^2 i 36π cm^2. Izračunaj širinu kružnog prstena.
5. Izračunaj površinu gornje površine mašinskog elementa datog na crtežu *5*.



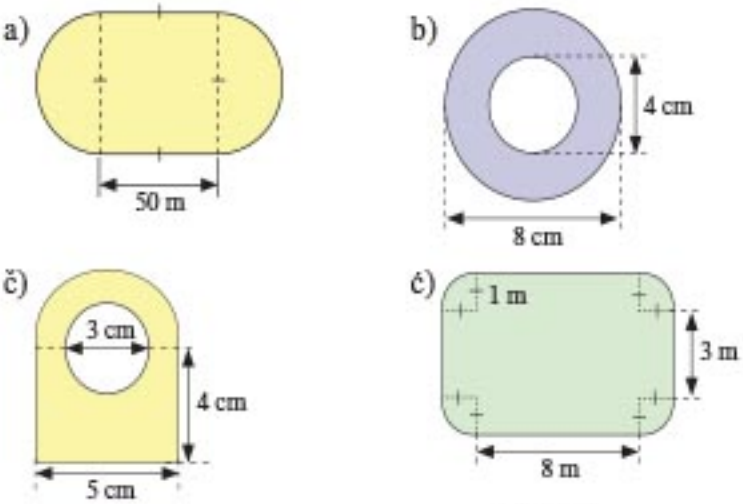
crtež 5

6. Malo kružno jezero ima prečnik od 16 m (crtež 6).
   a) Izračunaj površinu plastike potrebnu za oblaganje dna ribnjaka.
   b) Oko jezera treba postaviti traku širine 100 cm, ispunjenu kamenčićima.
   Izračunaj površinu površine prekrivene kamenčićima.



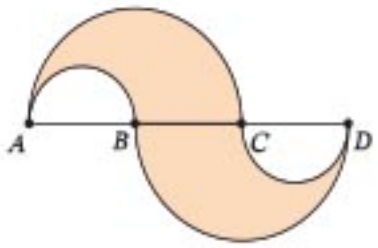
crtež 6

7. Izračunaj površinu oblika datih na crtežu 7.
   Zaokruži rješenja na 2 decimalna mjesta.

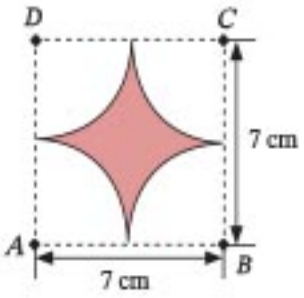


crtež 7

8. Četiri grupe učenika razvijaju prijedlog amblema za školske uniforme. Svaka grupa predlaže svoj dizajn. Amblem treba da se izradi od tekstila i što je moguće ekonomičnije. Koji amblem će biti napravljen uz najmanju potrošnju tekstila?



crtež 8a



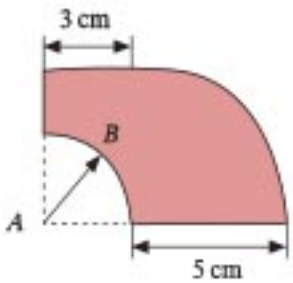
crtež 8б

Tim 1 izrađuje amblem prikazan na crtežu 8a, pod uslovom da $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 3\,\text{cm}$.

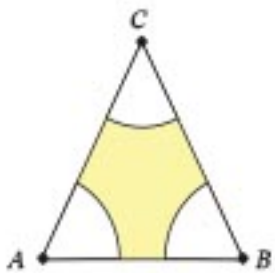
Tim 2 izrađuje amblem prikazan na crtežu 8b, pod uslovom da $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 7\,\text{cm}$.

Tim 3 izrađuje amblem prikazan na crtežu 8v, pod uslovom da veći kružni luk ima poluprečnik od 5 cm, a manji kružni luk ima poluprečnik od $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$.

Tim 4 izrađuje amblem prikazan na crtežu 8g, pod uslovom da kružni lukovi sa centrima u tjemenima jednakostraničnog trougla ABC sa stranicom 7 cm imaju poluprečnike od 2 cm.



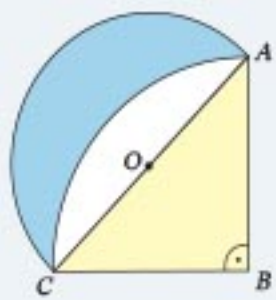
crtež 8в



crtež 8г

Istraživanje

Pokaži da je površina figure ograničene dvama kružnim lukovima, obojene plavom bojom na crtežu 9, jednaka površini jednakokrakog pravouglog trougla ACB, obojenog žutom bojom.



crtež 9

12. POVRŠINA PRIZME I PIRAMIDE

Površina prizme

Aktivnost

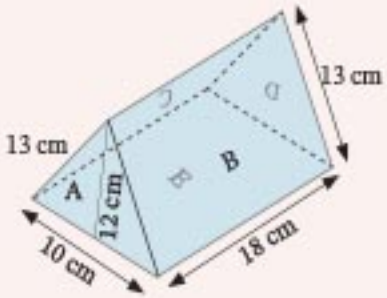
Razmotri prizmu i njenu mrežu datu na crtežu *1*.

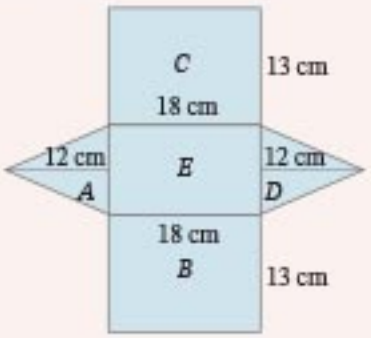
a) Od kojih mnogouglova se sastoji mreža trouglaste prizme?

b) Uoči da je strana A prizme podudarna sa stranom D, B je podudarna sa C, E a nije podudarna ni sa jednom drugom stranom prizme.

c) Šta predstavlja zbir površina svih mnogouglova iz mreže prizme? Kako se može odrediti površina prizme?

č) Izračunaj površinu date prizme koristeći njenu mrežu.





crtež 1

Iz definicije prizme jasno je da se njena površina može izračunati kao zbir površina svih njenih strana.

Površina prizme je zbir površina dviju osnovica i površina bočnih površina – strana.

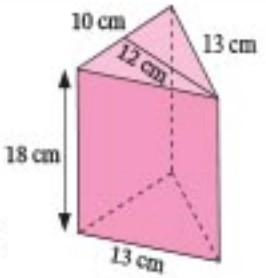
Zato se površina prizme P izračunava prema formuli:

$$P = 2B + M,$$

gdje je B površina osnovice, a M površina bočne površine – strana prizme.

Primjer 1

Izračunaj površinu prizme date na crtežu *2*.



crtež 2

Osnova prizme je jednakokraki trougao sa osnovom od 10 cm i odgovarajućom visinom od 12 cm, pa njena površina iznosi:

$$B = \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} = 60\ \text{cm}^2.$$

Bočna površina prizme sastoji se od 3 bočne strane koje su pravougaonici. Dvije od njih su podudarne, sa dimenzijama 13 cm i 18 cm, a treća sa dimenzijama 10 cm i 18 cm.
Zato površina bočne površine iznosi

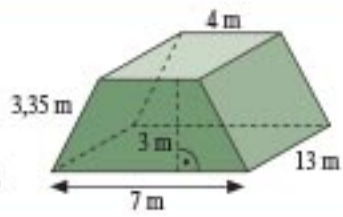
$$M = 2 \cdot 13\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} + 10\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 468\,\text{cm}^2 + 180\,\text{cm}^2 = 648\ \text{cm}^2.$$

Površina prizme iznosi

$$P = 2B + M = 2 \cdot 60\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 120\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 768\ \text{cm}^2.$$

Primjer 2

Izračunaj površinu prizme date na crtežu 3.



crtež 3

Osnova prizme je trapez sa površinom

$$B = \frac{7\,\text{m} + 4\,\text{m}}{2} \cdot 3\,\text{m} = 16{,}5\,\text{m}^2.$$

Površina bočne površine iznosi

$$M = 7\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} + 4\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} + 2 \cdot 3{,}35\,\text{m} \cdot 13\,\text{m} = 230{,}1\,\text{m}^2$$

Prema formuli za izračunavanje površine prizme, dobijamo

$$P = 2B + M = 2 \cdot 16{,}5\,\text{m}^2 + 230{,}1\,\text{m}^2 = 263{,}1\,\text{m}^2.$$

Zadatak 1

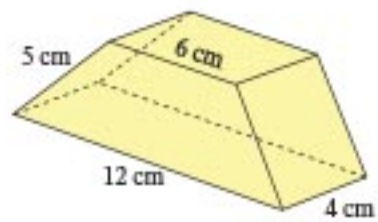
Izračunaj površinu prizme sa osnovom pravouglog trougla i katetama $a = 5$ cm i $b = 12$ cm, ako je visina $H = 17{,}4$ cm.

Zadatak 2

Izračunaj površinu četverougaone prizme sa osnovom romba čije su dijagonale $d_1 = 8$ cm i $d_2 = 6$ cm, ako je visina $H = 0{,}74$ dm.

Zadatak 3

Kutija ima oblik i dimenzije kao na crtežu 4. Izračunaj površinu kartona koji je potreban da bi se napravila kutija.



crtež 4

Površina piramide

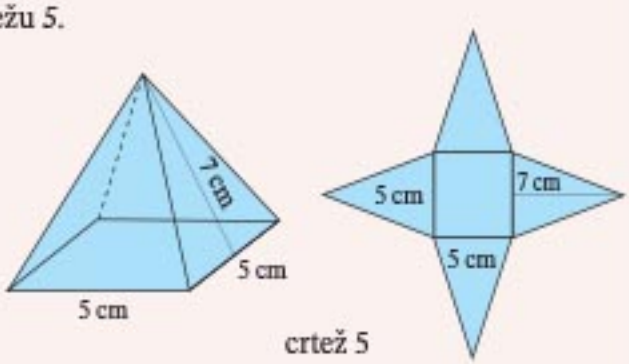
Aktivnost

Razgledaj piramidu i njenu mrežu datu na crtežu 5.

a) Od kojih mnogouglova je sastavljena mreža četverougaone piramide?

b) Koliki je zbir površina svih mnogouglova mreže piramide? Kako se može odrediti površina piramide?

c) Izračunaj površinu date piramide pomoću njene mreže.



crtež 5

Iz definicije o piramidi, i uopšte iz mreže piramide, uočava se da se njena površina može izračunati kao zbir površina svih strana.

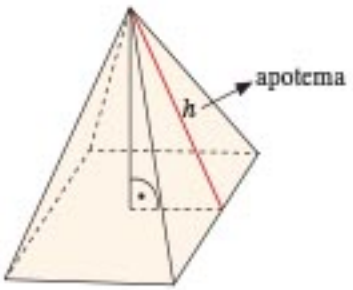
Površina piramide je zbir površine osnove i površine bočne površine-strane.

Prema tome, površina piramide P izračunava se prema formuli:

$$P = B + M,$$

gdje je B površina osnove, a M površina bočne površine-strane piramide.

Visina bočne strane spuštena sa vrha pravilne piramide do odgovarajuće osnovne ivice osnove naziva se **apotema piramide** (crtež 6).



crtež 6

Primjer 3

Izračunaj površinu pravilne četverougaone piramide sa osnovnom ivicom $a = 12$ cm i apotemom $h = 16$ cm.

Osnova piramide je kvadrat čija je površina osnove

$$B = a^2 = (12\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2.$$

Bočna površina sastoji se od 4 jednakokraka trougla sa osnovom 12 cm i visinom 16 cm. Njena površina iznosi

$$M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot 12\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 384\ \text{cm}^2.$$

Prema formuli za izračunavanje površine piramide, nalazimo da je

$$P = B + M = 144\text{ cm}^2 + 384\text{ cm}^2 = 528\text{ cm}^2.$$

Primjer 4

Površina bočne površine-strane pravilne trouglaste piramide sa osnovnom ivicom $a = 12$ cm iznosi $M = 144$ cm². Izračunaj apotemu piramide.

Bočna površina trouglaste piramide sastoji se od 3 podudarna jednakokraka trougla sa osnovom $a = 12$ cm i apotemom h, koju treba izračunati.

Površina bočne strane je $M = 3 \cdot \frac{ah}{2}$ iz čega nalazimo da apotema iznosi

$$h = \frac{2M}{3a} = \frac{2 \cdot 144\,\text{cm}^2}{3 \cdot 12\,\text{cm}} = \frac{288\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}} = 8\ \text{cm}.$$

Zadatak 4

U prodavnici za dekoracije prodaje se stakleni ukras u obliku šestougaone piramide. Ukupna površina ukrasa je 900 cm². Svaka bočna strana ima površinu od 100 cm².

a) Koliko bočnih strana ima piramida?

b) Kolika je površina osnove?

c) Ako je osnova pravilan šestougao, kolika je dužina ivice osnove?

Primjer 5

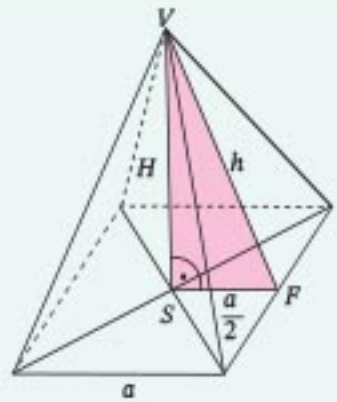
Izračunaj površinu pravilne četverougaone piramide sa osnovnom ivicom $a = 5$ cm i visinom $H = 6$ cm.

Iz pravouglog trougla FSV, koristeći Pitagorinu teoremu, izračunat ćemo apotemu (crtež 7)

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (2{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{42{,}25\,\text{cm}^2} = 6{,}5\,\text{cm}.$$

Prema formuli za izračunavanje površine piramide, nalazimo da

$$P = B + M = a^2 + 4\frac{ah}{2} = (5\,\text{cm})^2 + 2 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 6{,}5\,\text{cm} = 90\ \text{cm}^2.$$



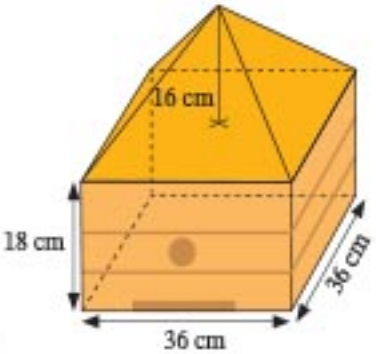
crtež 7

Zadatak 5

Jedan šator za kampovanje ima oblik pravilne četverougaone piramide. Visina šatora je 3 m, a apotema je 5 m. Koliko kvadratnih metara zemlje je potrebno za postavljanje šatora?

Zadatak 6

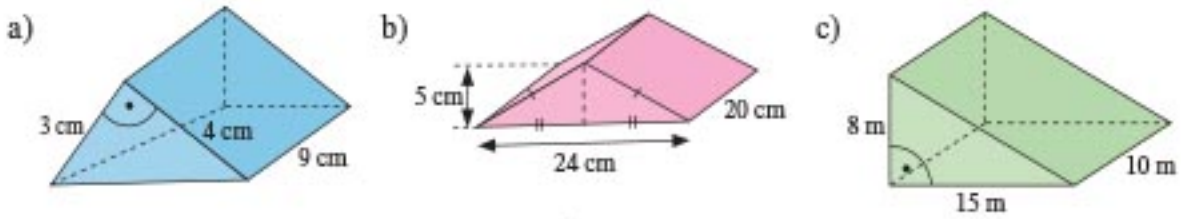
Pčelar je napravio sanduk za pčele u obliku kvadra sa poklopcem u obliku piramide (crtež 8). Cijeli sanduk treba da se oboji specijalnom vodootpornom bojom radi zaštite od kiše. Koliko kantica boje će biti potrebno da se oboji cijela spoljašnja površina sanduka, ako se jednom kanticom boje može obojiti 150 cm^2?



crtež 8

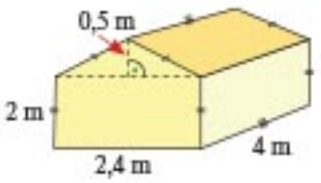
ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Bočna površina pravilne šestougaone prizme je 660 cm^2, a visina je 10 cm. Izračunaj površinu osnove.
2. Izračunaj površine prizmi datih na crtežu 9:



crtež 9

3. Botanička bašta prikazana na crtežu 10 napravljena je od plastične folije koja košta 350 denara po kvadratnom metru.

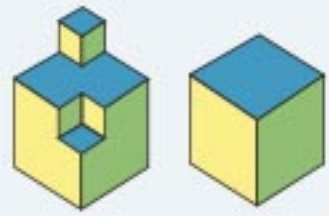


crtež 10

4. Napiši formulu za izračunavanje površine:
   a) pravilne trouglaste piramide, b) pravilne šestougaone piramide.
5. Ambalaža za čokoladno mlijeko napravljena od kartona ima oblik tetraedra sa stranicama 10 cm. Kolika je površina kartona od kojeg je napravljena kutija?
6. Krov ima oblik pravilne šestougaone piramide sa apotemom od 2 m i ivicom osnove od 2 m. Koliko tabli lima je potrebno za krov, ako je površina jedne table 2 m^2?
7. Učenici tvoje škole učestvuju u takmičenju za dizajniranje ekološke turističke atrakcije. Tim treba da dizajnira paviljon u obliku piramide koji će biti izgrađen od recikliranog stakla. Piramida ima osnovu pravilnog šestougla sa stranicom od 2 m, a apotema je 3 m. Kolika će biti cijena upotrijebljenog stakla ako kvadratni metar košta 1200 denara?

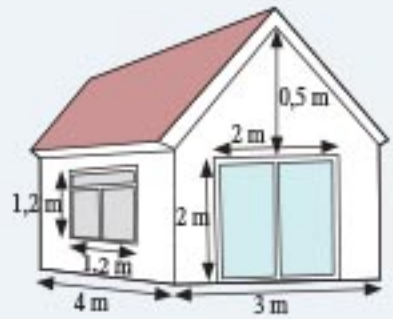
Istraživanje

1. Dio kocke koji je izdvojen postavljen je iznad nje (crtež 11). Uporedi površine ova dva trodimenzionalna tijela.
Da li su jednake?
Obrazloži svoj odgovor.



crtež 11

2. Da bi napravio/la malu kućicu za čuvanje alata, potrebne su drvene daske, staklo i lim. Dimenzije kućice prikazane su na crtežu 12. Zidovi i krov su od drveta, vrata su od lima, a na prozoru je postavljeno samo staklo.
Izračunaj koliki bi trebalo da bude budžet za materijal potreban za izgradnju kućice.
Raspitaj se o cijenama u odgovarajućim prodavnicama ili na internetu.
Istraži koji su drugi materijali potrebni (na primjer, za spajanje građevinskih elemenata, za premazivanje i zaštitu i sl.)



crtež 12

13. ZAPREMINA PRIZME I PIRAMIDE

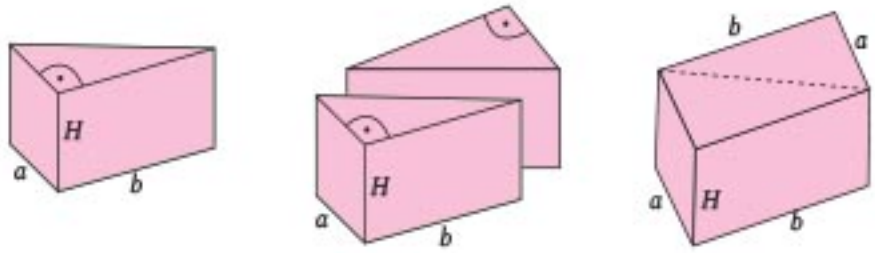
Zapremina prizme

Aktivnost

Nađi zapreminu kutije za žitarice ili nekog drugog predmeta u obliku kvadra iz svakodnevnog života. Kolika je zapremina?

Pratimo korake koji vode do formule za izračunavanje zapremine prizme.

1. Nađi zapreminu prizme čija je osnova pravougli trougao (crtež 1).



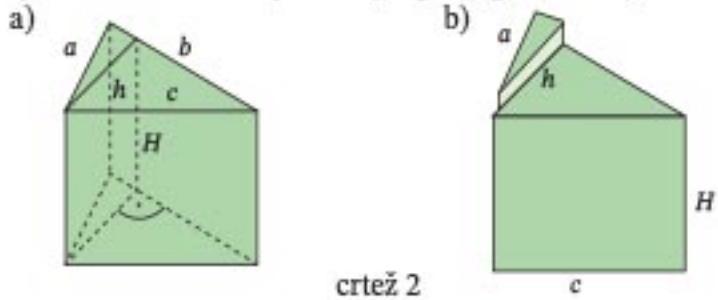
crtež 1

Prema crtežu 1, zapremina date trouglaste prizme može se izračunati kao polovina zapremine kvadra sa dimenzijama a, b i H, odnosno

$$V = \frac{a \cdot b \cdot H}{2} = \frac{a \cdot b}{2} H = B \cdot H$$

gdje je B površina osnove prizme (pravougli trougao), a H je visina prizme.

2. Nađi zapreminu prizme sa osnovom proizvoljnog trougla (crtež *2*).



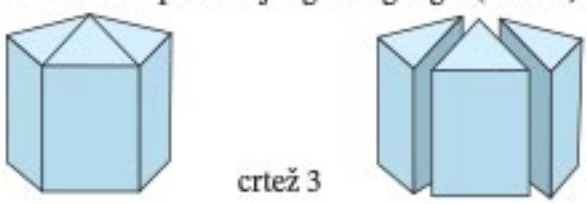
crtež 2

Ovaj slučaj svodimo na prethodni, crtanjem jedne od visina osnove. Na ovaj način dobijamo dva pravougla trougla sa jednom zajedničkom katetom.

Sada je trougaona prizma podijeljena na dvije trougaone prizme sa osnovama u obliku pravouglih trouglova, pa će njena zapremina biti zbir zapremina te dvije prizme.

$$V = V_1 + V_2 = B_1 \cdot H + B_2 \cdot H = (B_1 + B_2) \cdot H = B \cdot H.$$

3. Nađi zapreminu prizme sa osnovom proizvoljnog mnogougla (crtež 3).



crtež 3

U slučaju kada je osnova prizme proizvoljni mnogougao, povlačimo sve dijagonale iz jednog tjemena mnogougla. Na ovaj način, mnogougao je podijeljen na konačno mnogo trouglova. Za svaki od dobijenih trouglova primjenjujemo postupke koje smo prethodno razmatrali. Slično kao gore, dobijamo da je

$$V = B \cdot H.$$

Zapremina prizme jednaka je proizvodu površine osnove i visine prizme.

Prema tome, zapremina prizme V izračunava se prema formuli:

$$V = B \cdot H,$$

gdje je B površina osnove, a H visina prizme.

Primjer 1

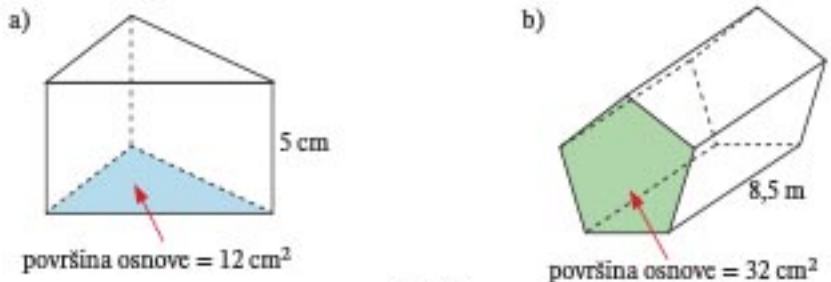
Izračunaj zapreminu prizme sa osnovom trougla i stranicom $a = 4$ cm i visinom $h = 5$ cm, ako je visina prizme $H = 6$ cm.

Prema formuli za izračunavanje zapremine prizme, dobijamo da je

$$V = B \cdot H = \frac{a \cdot h}{2} \cdot H = \frac{4\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 60\ \text{cm}^3.$$

Zadatak 1

Izračunaj zapreminu prizmi na crtežu 4:



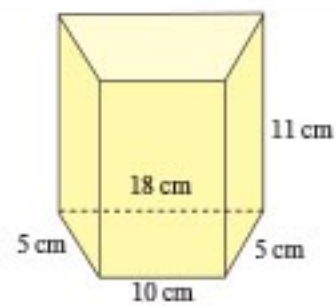
crtež 4

Zadatak 2

Ambalaža za čokoladu ima oblik pravilne trouglaste prizme sa osnovnom ivicom dužine 5 cm i visinom od 18 cm. Kolika je zapremina posude?

Primjer 2

Izračunaj zapreminu četverougaone prizme sa osnovom jednakokrakog trapeza sa osnovicama $a = 18$ cm, $b = 10$ cm i krakom $c = 5$ cm, ako je visina $H = 11$ cm (crtež 5).



crtež 5

Prvo ćemo odrediti visinu trapeza, koji je osnova prizme (crtež 6).

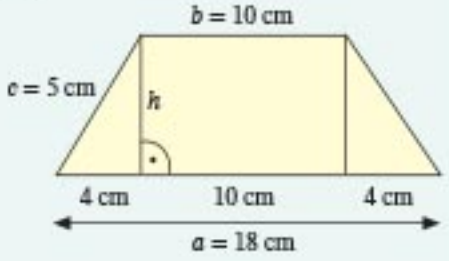
$$h=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-(4\,\text{cm})^2}=\sqrt{25\,\text{cm}^2-16\,\text{cm}^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}.$$

Prema formuli za izračunavanje površine trapeza, za površinu osnove dobijamo

$$B=\frac{a+b}{2}h=\frac{18\,\text{cm}+10\,\text{cm}}{2}\cdot 3\,\text{cm}=42\ \text{cm}^2.$$

Prema formuli za izračunavanje zapremine prizme, dobijamo

$$V=B\cdot H=42\ \text{cm}^2\cdot 11\ \text{cm}=462\ \text{cm}^3.$$



crtež 6

Zadatak 3

Izračunaj zapreminu prizme sa osnovom deltoida i dijagonalama $d_1=24$ cm i $d_2=13$ cm, ako je visina $H=7{,}2$ cm.

Aktivnost

Kako možeš iz formule $V=B\cdot H$ da izračunaš:
a) površinu osnove B, ako su dati V i H, b) visinu H, ako su dati V i B?

Primjer 3

U mali akvarijum oblika pravilne četverougaone prizme sipano je 8,4 l vode do visine $H=2{,}1$ dm. Kolika je osnovna ivica akvarijuma?

Osnova pravilne četverougaone prizme je kvadrat. Prema formuli za izračunavanje zapremine prizme, dobijamo da je

$$V=B\cdot H=a^2\cdot H$$

Dakle, za dužinu osnovne ivice, nalazimo da je

$$a=\sqrt{\frac{V}{H}}=\sqrt{\frac{8{,}4\,\text{dm}^3}{2{,}1\,\text{dm}}}=\sqrt{4\,\text{dm}^2}=2\,\text{dm}\qquad (1\ l=1\ \text{dm}^3).$$

Zadatak 4

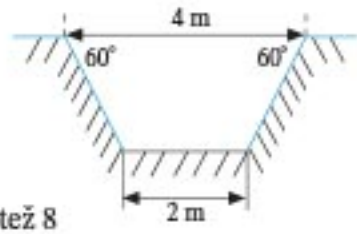
Na crtežu 7 prikazan je akvarijum sa njegovim dimenzijama. Površina vode u akvarijumu je 5 cm ispod visine akvarijuma. Koliko litara vode ima u akvarijumu?



crtež 7

Zadatak 5

Pri izgradnji puta na terenu koji obiluje vodom, bilo je potrebno iskopati kanal u koji će se odlijevati voda. Njegov poprečni presjek prikazan je na crtežu 8.
Koliko je kubnih metara zemlje izvađeno prilikom kopanja kanala, ako je kanal dug 2 km?



crtež 8

Zapremina piramide

Aktivnost

Napravi od kartona model prizme i piramide sa podudarnim osnovama i jednakim visinama. Zatim napuni piramidu vodom (pijeskom, rižom ili šećerom) i sipaj cijelu količinu u prizmu. Ponavljaj postupak dok ne napuniš prizmu.
Šta primjećuješ?

Zapremina piramide jednaka je jednoj trećini proizvoda površine osnove i visine piramide.

Prema tome, zapremina piramide V izračunava se prema formuli:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

gdje je B površina osnove, a H visina piramide.

Primjer 4

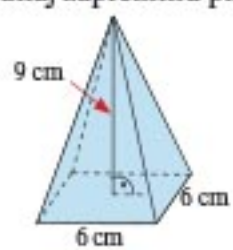
Koliko kubnih metara iznosi zapremina Velike Keopsove piramide, koja je visoka 150 m i čija je osnova kvadrat sa stranicom dugom 230 m?

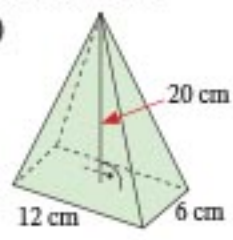
Prema formuli za izračunavanje zapremine piramide, dobijamo

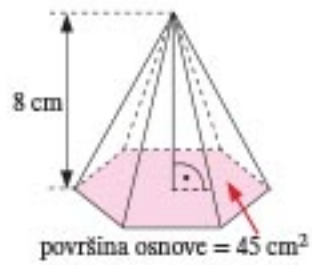
$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (230\ \text{m})^2 \cdot 150\ \text{m} = 2645000\ \text{m}^3.$$

Zadatak 6

Izračunaj zapreminu piramida datih na crtežu 9:

a)


b)


c)


crtež 9

Aktivnost

Kako možeš iz formule $V = \frac{1}{3} B \cdot H$, izračunati:

a) površinu osnove B, ako su dati V i H,

b) visinu H, ako su dati V i B?

Primjer 5

Izračunaj visinu piramide zapremine 12 cm³ i površine osnove 4 cm².

Iz formule za izračunavanje zapremine piramide, nalazimo da je

$$H = \frac{3 \cdot V}{B} = \frac{3 \cdot 12\ \text{cm}^3}{4\ \text{cm}^2} = 9\ \text{cm}.$$

Zadatak 7

Izračunaj površinu osnove piramide sa zapreminom 8 cm³ i visinom $H = 2$ cm.

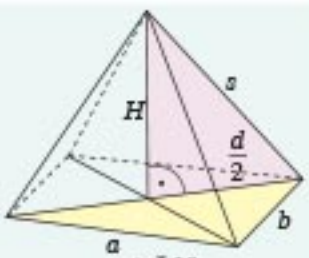
Primjer 6

Izračunaj zapreminu piramide sa pravougaonom osnovom sa dimenzijama $a = 24$ cm i $b = 32$ cm, ako je bočna ivica 25 cm.

Dijagonala osnove piramide je

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{576\ \text{cm}^2 + 1024\ \text{cm}^2} = \sqrt{1600\ \text{cm}^2} = 40\ \text{cm}.$$

Iz pravouglog trougla koji je formiran od polovine dijagonale pravougaone osnove, bočne ivice i visine piramide, dobija se visina piramide (crtež 10)



crtež 10

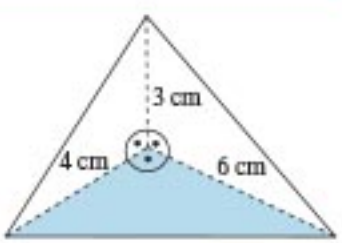
$$H = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(25\ \text{cm})^2 - (20\ \text{cm})^2} = \sqrt{625\ \text{cm}^2 - 400\ \text{cm}^2} = \sqrt{225\ \text{cm}^2} = 15\ \text{cm}.$$

Prema formuli za izračunavanje zapremine piramide, nalazimo da zapremina iznosi

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{abH}{3} = \frac{24\ \text{cm} \cdot 32\ \text{cm} \cdot 15\ \text{cm}}{3} = 3840\ \text{cm}^3$$

Zadatak 8

Stolar odsijeca komad drveta u obliku trouglaste piramide od drugog komada drveta, koji je bio u obliku kvadra. Dimenzije isječenog komada drveta date su na crtežu 11.
Izračunaj njegovu zapreminu.

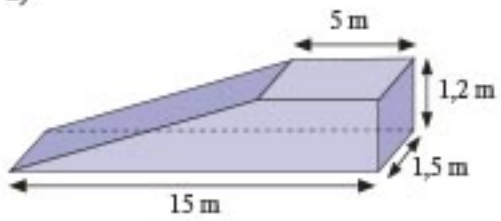


crtež 11

ZADACI ZA VJEŽBANJE

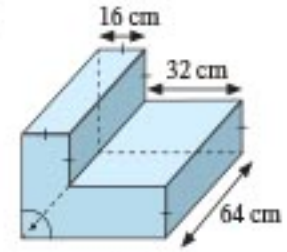
1. Izračunaj zapreminu betona koja je potrebna za izgradnju:
a) rampe prikazane na crtežu 12a, b) stepenica prikazanih na crtežu 12b.

a)



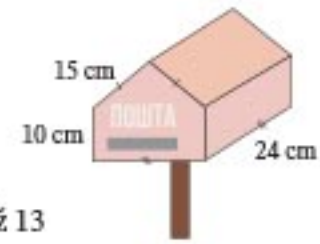
crtež 12a

b)



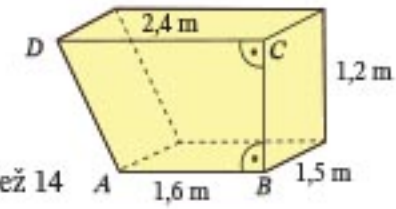
crtež 12б

2. a) Izračunaj zapreminu vazduha u poštanskom sandučetu (crtež 13).
b) U poštansko sanduče su stavljene tri koverte dimenzija 23 cm × 12 cm × 5 mm. Kolika je zapremina neiskorištenog prostora u poštanskom sandučetu?



crtež 13

3. Na crtežu *14* dat je kontejner za kompostiranje. Koliko kubnih metara komposta može da primi kontejner?



crtež 14

4. Kolika je zapremina prizme čija je osnova jednakokraki trapez sa stranicama $a = 7\frac{1}{2}$ cm, $b = 8\frac{1}{3}$ cm, $c = 2\frac{2}{3}$ cm, ako je visina $H = 5$ cm?

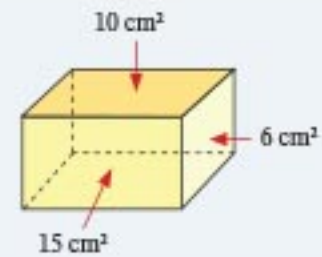
5. Zapremina pravilne četverougaone piramide je 810 cm³, a visina je 30 cm. Nađi osnovnu ivicu piramide.

6. Pravilna četverougaona piramida ima visinu $H = 6$ cm i apotemu $h = 10$ cm. Izračunaj površinu i zapreminu piramide.

7. Koliko litara kišnice sakuplja rezervoar za vodu u obliku piramide sa pravougaonom osnovom dimenzija 2,4 m, 3,2 m i bočnom ivicom od 2,5 m?

Istraživanje

Izračunaj zapreminu kvadra na crtežu 15 ako su date površine njegovih strana.



crtež 15

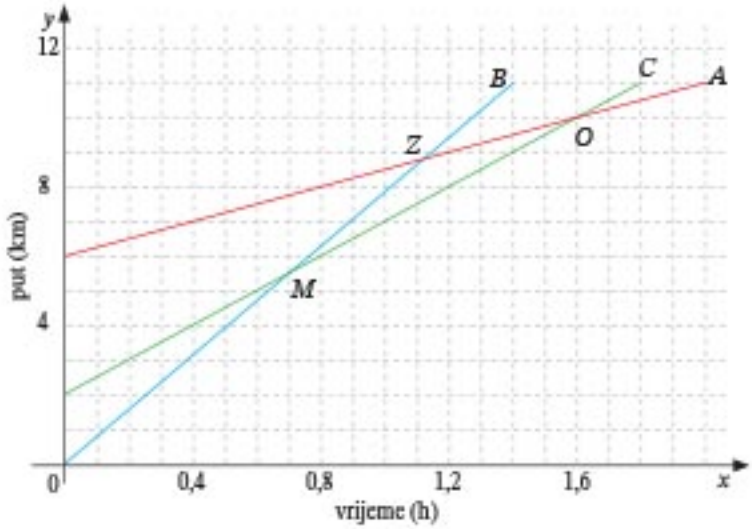
ZADACI ZA PONAVLJANJE I UTVRĐIVANJE

1. Pretvori: 10 godina 9 mjeseci 20 dana 15 sati u:
   a) godine, b) mjesece, c) dane, č) sate.

2. Mimi ima $12\frac{3}{4}$, a Emi $9\frac{1}{6}$ godina.
   a) Koliko je godina svaka od njih imala prije 10 mjeseci?
   b) Koliko je godina Mimi starija od Emi?

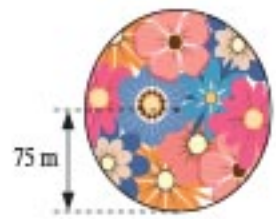
3. Nacrtaj grafikon koji prikazuje putanju kamiona koji napušta grad A u 9 sati ujutro, poslije dva sata vožnje pravi pauzu od pola sata, a u 14 sati stiže u grad B, koji je udaljen 250 km od grada A. Tamo ostaje 1 sat. Zatim kreće nazad, vozi bez pauza i stiže u grad A u 19 sati.

4. Tri grupe turista, A, V i S, idu u panoramski obilazak grada autobusom. Tačka *M* je historijski muzej, tačka Z je zoološki vrt, a tačka O je zgrada opere (crtež 1).
   a) Koliko su udaljeni zgrada opere i historijski muzej?
   b) Koja od grupa nije prošla pored opere?
   c) Ispred kojeg objekta su prošle grupe V i S?
   č) Koja grupa se vozila najbrže, a koja najsporije kroz grad?
   ć) Koja grupa je prešla najduži, a koja najkraći put?
   d) Koliko je vremena trebalo grupi S da pređe put od historijskog muzeja do opere?



crtež 1

5. Natalija želi da ogradi svoju baštu sa cvijećem (crtež 2). Koliko metara ograde će Nataliji biti potrebno?



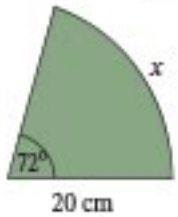
crtež 2

6. Od tanke žice, dužine 1 m, Sanja hoće da napravi alke za ogrlicu koje su kružnog oblika, tako da svaka alka ima prečnik 1 cm. Koliko alki može da napravi Sanja i kolika će biti dužina njene ogrlice?

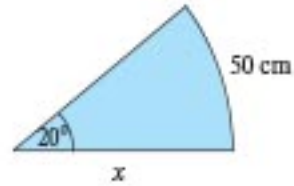
7. Kazaljka na satu koja pokazuje minute duga je 6 cm. Koliki put će preći vrh te kazaljke od podneva do 13:30 h?

8. Izračunaj elemente označene sa x na crtežu *3*.

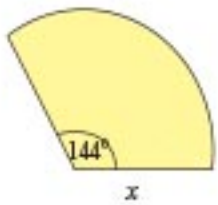
a) x – dužina kružnog luka



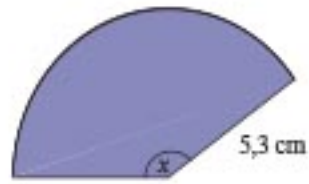
b) dužina kružnog luka $a = 50$ cm



c) dužina kružnog luka $a = 10\pi$ cm

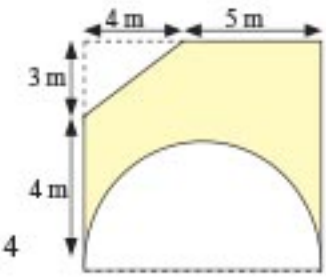


č) dužina kružnog luka $a = 22{,}81$ cm



crtež 3

9. Izračunaj obim oblika datog na crtežu 4.



crtež 4

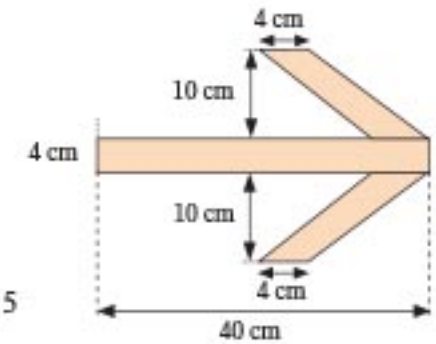
10. Kolika je procjena za površinu poda lifta:
a) 3 mm², b) 3 cm², c) 3 m², č) 3 ha.

11. Napiši najprikladniju mjeru kojom ćeš izraziti površine za:
a) DVD-a, b) teniski teren, c) novčić od 1 denara, č) Španiju.

12. Leonid je majstor za izradu ukrasa od drveta. On ima komad drveta u obliku romba sa obimom od 96 dm i rastojanjem između suprotnih stranica od 10 dm. Ima kanticu boje za drvo od 400 ml sa oznakom „Koristiti 50 boje na kvadratni decimetar“. Da li Leonid ima dovoljno boje da bi dva puta premazao površinu komada drveta?

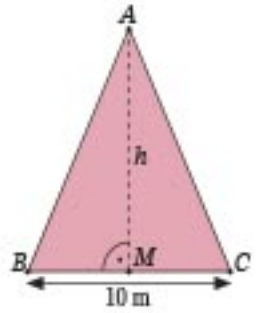
13. Koliku visinu ima paralelogram površine 840 cm² ako je jedna od njegovih stranica 3,5 dm?

14. Izračunaj površinu strelice na crtežu *5*.



crtež 5

15. Izračunaj površinu trougla na crtežu *6*, ako je $h = 14$ m.



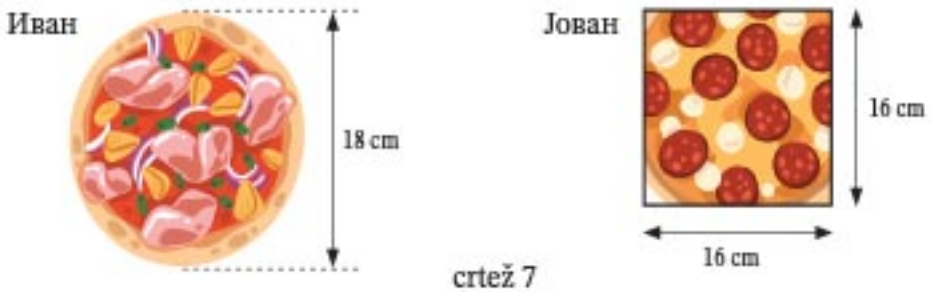
crtež 6

16. Ako je površina trougla 63 cm^2, odredi visinu trougla koja je povučena do stranice $a = 18$ cm?

17. Kancelarijski sto ima oblik trapeza sa paralelnim stranicama $a = 160$ cm i $b = 120$ cm, a rastojanje između njih je 50 cm. Koliko će koštati prekrivanje stola staklom ako je cijena 1200 denara za kvadratni metar?

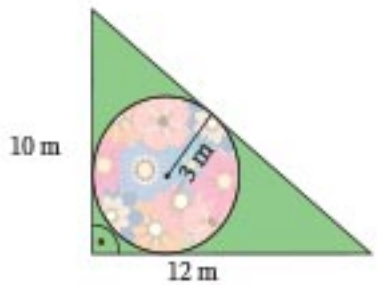
18. Kvadrat sa dijagonalom od 12 cm ima istu površinu kao deltoid sa jednom dijagonalom od 16 cm. Kolika je druga dijagonala deltoida?

19. Čija je pizza veća, Ivanova ili Jovanova (crtež 7)?



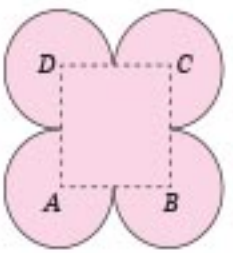
crtež 7

20. Travnjak u parku ima oblik trougla, a u njemu je zasađena cvjetna leja u obliku kruga (crtež 8).



crtež 8

21. Izračunaj obim i površinu figure na crtežu 9, ako kvadrat *ABCD* ima dužinu stranice 7 cm.

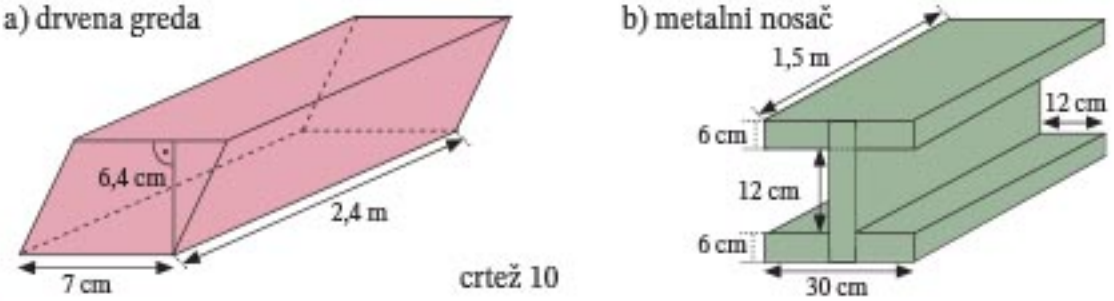


crtež 9

22. Na crtežu *10* prikazani su građevinski materijali. Izračunaj njihovu površinu i zapreminu.

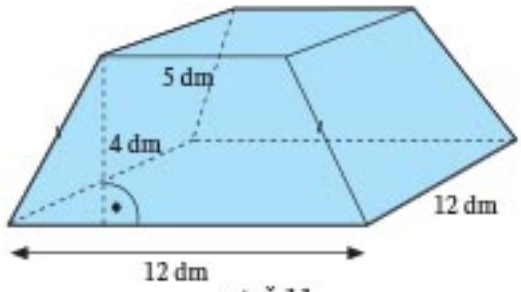
a) drvena greda

b) metalni nosač



crtež 10

23. Plastična posuda za vodu ima oblik i dimenzije prikazane na crtežu *11*. Izračunaj površinu plastike potrebnu za izradu posude (gornja strana je otvorena). Koliko litara vode može da stane u posudu ako se potpuno napuni?



crtež 11

24. Krov drvene kolibe je piramida sa kvadratnom osnovom. Dužina stranice osnove je 22 dm, a apotema je 14 dm. Petar bi htio da ofarba krov svoje drvene kolibe i hoće da zna koliko boje treba da kupi. Ako 1 kutija boje pokriva 400 dm^2, koliko kutija boje treba da kupi Petar?

25. Kutija boje koju Petar koristi za farbanje svoje kolibe ima oblik piramide, sa osnovom jednakokrakog trougla, površinom od 50 cm^2 i visinom od 18 cm. Koliko mililitara boje se nalazi u kutiji?



Tema 5:

RAD SA PODACIMA

Rezultati učenja:

Proučavajući ovu temu, moći ćeš da:

- kreiraš detaljan i obrazložen plan istraživanja koji će uključivati izbor uzorka prema različitim obilježjima i analizu podataka.
- prezentuješ i tumačiš rezultate istraživanja, uključujući predstavljanje pomoću dijagrama, tabela i određivanje ranga, moda, medijane i aritmetičke sredine.
- rješavaš različite vrste problema (za igre na sreću, ekonomske probleme ili statističke analize), uključujući događaje koji su ekskluzivni i uzastopni (rastuće i opadajuće).

1. POPULACIJA I UZORAK

Aktivnost

Prikupi podatke o rezultatima postignutim na posljednjem testu iz matematike za učenike u tvom razredu i predstavi ih u tabeli. Kako si prikupio/la podatke?

Prije nego što prikupimo podatke za studiju, prvo moramo razmotriti ciljnu **populaciju**. To je grupa predmeta, pojava ili ljudi o kojima želimo dobiti informacije.

Populacija je skup svih elemenata (jedinki, karakteristika, rezultata) neke pojave koji imaju zajedničku karakteristiku.

Zajednička karakteristika elemenata populacije koja je predmet posmatranja (mjerenja, ispitivanja) naziva se **obilježje**.

Jedan element (objekat, jedinica) iz populacije naziva se statistička jedinica populacije.

Primjer 1

Koja je populacija, koja je statistička jedinica i koje su karakteristike populacije pri posmatranju ili istraživanju:
a) spol, uzrast, zaposlenost stanovnika jednog grada,
b) masa, uzrast, rasa krava na farmi,
c) pretplata, visina računa korisnika usluga telekomunikacione kompanije.

a) Ako se posmatraju stanovnici grada:
- populacija su svi stanovnici,
- statistička jedinica je jedan stanovnik,
- karakteristike jedinice mogu biti: spol, zaposlenost, starost, mjesto rođenja, boja očiju, visina itd.

b) Ako se posmatraju krave na farmi:
- populacija su sve krave na toj farmi,
- statistička jedinica je jedna krava na toj farmi,
- karakteristike jedinice mogu biti: količina mlijeka u litrima koju jedna krava daje dnevno, starost, rasa, masa itd.

c) Ako se posmatraju korisnici usluga telekomunikacione kompanije:
- populacija su svi korisnici te kompanije,
- statistička jedinica je jedan korisnik,

- karakteristike jedinice mogu biti: vrsta pretplate (pretplata, postpejd), broj telefonskih poziva obavljenih tokom određenog vremenskog perioda, trajanje telefonskih poziva, iznos izdatih računa, starosna struktura, spolna struktura pretplatnika i slično.

Iz datih primjera možeš vidjeti da su karakteristike promjenljive veličine i da se vrijednost posmatrane karakteristike pojedinca ne može unaprijed odrediti.

Prilikom prikupljanja podataka možemo koristiti popis ili uzeti uzorak. Popis znači da prikupljamo podatke za svaku osobu u populaciji. Na primjer, možemo izvršiti popis proizvoda u prodavnici ili popis stanovnika jedne zemlje.



Crtež 1

Primjer 2

Enes bi htio da sazna prosječnu visinu učenika u svojoj školi.
a) Kolika je populacija i koje su karakteristike te populacije?
b) Objasni kako je Enes to mogao uraditi praktičnije da bi uštedio vrijeme i novac.

a) Populacija se sastoji od svih učenika u školi. Da bi Enes saznao prosječnu visinu učenika, popis bi podrazumijevao mjerenje visine svakog učenika u njegovoj školi. Visina je karakteristika populacije.
b) U zavisnosti od ukupnog broja učenika u školi, mjerenje visine svakog učenika bi oduzimalo mnogo vremena i bilo veoma nepraktično. Ekonomičnije je, u smislu vremena i resursa, za istraživanje uzeti uzorak populacije. U zavisnosti od ukupnog broja učenika, Enes može slučajnim izborom odabrati dovoljan broj učenika iz svoje škole i izmjeriti njihovu visinu.

Uzorak je podskup populacije.

Zadatak 1

Odredi da li bi se koristila cijela populacija ili uzorak za istraživanje:
a) starosti ljudi u tržnom centru,
b) mase kovanica proizvedenih u fabrici za kovanje novca,
c) cijena artikala sa menija u restoranu.

Kada se uzima uzorak populacije, prikupljanje podataka je brže i jednostavnije nego rad sa cijelom populacijom, ali nije toliko detaljno niti tačno.

Pošto uzorci ne pružaju informacije o cjelokupnoj populaciji, statistički podaci dobijeni iz uzorka mogu se koristiti samo za **procjenu** statistike o populaciji.

Da bi procjena stvarnog stanja bila pouzdana, uzorak treba biti **reprezentativan**. Da bi se postigla reprezentativnost uzorka, sljedeći uslovi treba da budu ispunjeni:

- Izbor statističkih jedinica treba biti slučajan i nezavisan i svaka jedinica treba imati jednake šanse da bude izabrana.
- Uzorak treba biti dovoljno velik u odnosu na populaciju koju predstavlja.
- Uzorak treba pravilno (vjerno) predstavljati cjelokupnu populaciju.

Primjer 3

Odgovori na sljedeća pitanja u vezi sa istraživanjem koje Enes treba provesti u primjeru 2:

a) Kako bi Enes trebalo da postupi pri izboru uzorka da bi bio siguran u pouzdanost rezultata svog istraživanja?

b) Koje su prednosti i koji su nedostaci ako Enes izabere uzorak umjesto cijele populacije?

a) Uzorak koji će Enes odabrati treba da ispunjava sve uslove date gore u lekciji. Na primjer, ako u njegovoj školi ima 900 učenika, bilo bi dovoljno da uzorak ima 45 učenika. Izbor svakog učenika u uzorku treba biti slučajan i nezavisan i svaki učenik treba imati jednake šanse da bude izabran.
Isto tako, uzorak po svojoj strukturi treba odgovarati cjelokupnoj populaciji učenika.

- Enesov uzorak neće biti reprezentativan ukoliko odabere uzorak učenika samo iz devetog razreda, jer tada nije prikladan za sve učenike u školi. Prosječna visina uzorka bila bi mnogo veća od prosječne visine **svih** učenika u školi.
- S druge strane, ako Enes odabere samo 5 učenika, prosječna visina uzorka bila bi neadekvatna procjena prosječne visine svih učenika, jer je uzorak veoma mali.

b) Korištenje uzorka ima svoje prednosti, odnosno prikupljanje podataka je brže, jednostavnije i ekonomičnije u odnosu na vrijeme i druge resurse, ali s druge strane pruža procjenu populacije i nije toliko detaljno kao kada bi se koristila cijela populacija.

Zadatak 2

U tabeli su dati primjeri odabranog uzorka u vezi sa istraživanjem date karakteristike date populacije. Objasni da li je predloženi uzorak reprezentativan, a zatim, gdje je potrebno, navedi uzorak za koji vjeruješ da će dati bolji rezultat.

stanovništvo	karakteristika	uzorak
učenici naše zemlje	sport	po jedna nasumično izabrana osnovna i srednja škola
tosteri proizvedeni u jednoj fabrici	ispravnost	nasumično izabran jedan od stotinu proizvoda po serijskom broju
svi atomi u atmosferi	procenat vodonika	mjerenja provedena u Skoplju
proizvodi u jednoj prodavnici	broj proizvoda	cijela populacija

Zadatak 3

Jedna škola ima 820 učenika. 40 učenika je nasumično izabrano da popune anketu o svojoj školskoj uniformi.

a) Pronađi veličinu:

1) ciljne populacije,

2) uzorka.

b) Objasni zašto podaci prikupljeni na svaki od sljedećih načina možda neće dati uzorak koji je realna slika populacije:

1) Učenik koji provodi anketu zamolio je svojih deset najboljih prijatelja da popune anketu.

2) Svi učenici u razredu su anketirani.

3) Dobrovoljci se prijavljuju da popune anketu.

Zadatak 4

Kompanija za elektronske uređaje želi provesti istraživanje o tome da li ljudi više kupuju takve uređaje u prodavnici ili preko interneta. Oni ispituju ljude koji stoje ispred jedne prodavnice elektronskih uređaja u ponedjeljak ujutro. Objasni zašto podaci koji će biti prikupljeni vjerovatno neće odgovarati stvarnom stanju.

Zadatak 5

Fabrika električnih aparata proizvodi 15 000 aparata dnevno. Kao rukovodilac fabrike, tvoj zadatak je da istražiš koliko je proizvedenih aparata neispravno.

a) Odredi populaciju, karakteristike i predloži izbor uzorka.

b) Koje su prednosti, a koji su nedostaci rada sa uzorkom umjesto sa cijelom populacijom?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Školska prodavnica želi uvesti novu zdravu užinu. Direktor odlučuje provesti malo istraživanje kako bi saznao koje se užine učenicima u školi najviše dopadaju.
   Da bi to uradio, potrebno je da pomogneš grupi učenika koji će provoditi istraživanje
   a) Koja je populacija, a koja karakteristika u ovoj anketi?
   b) Objasni prednosti i nedostatke popisa kao metode koja se koristi u ovom slučaju.
   c) Ponudi najmanje dva različita načina za izbor uzorka učenika koji će predstavljati populaciju?
   č) Od ponuđenih uzoraka, izaberi onaj koji najbolje predstavlja cijelu populaciju i objasni zašto misliš da je baš taj uzorak reprezentativan.

2. Škola „Sveti Ćirilo i Metodije" ima 700 učenika. Direktor želi saznati koliko učenika u školi redovno praktikuje neki sport.
   a) Koja je populacija u ovom istraživanju?
   b) Koja je karakteristika koja se proučava?
   c) Koji od sljedećih opisa predstavlja uzorak ove populacije, a koji ne? Objasni svoj odgovor.
      1) Svi učenici VI razreda (85 učenika).
      2) Deset učenika iz svakog razreda u školi (od I do IX razreda, ukupno 90 učenika).
      3) Svi nastavnici u školi.
      4) Prvih 50 učenika koji su ušli u školsku biblioteku u utorak ujutro.
   č) Direktor razmatra da li da anketira svih 700 učenika ili da uzme uzorak od 120 učenika.
      1) Navedi dvije prednosti anketiranja svih 700 učenika.
      2) Navedi dvije mane anketiranja svih 700 učenika.

3. Fabrika za proizvodnju lampi proizvodi 50 000 lampi dnevno. Kontrolor kvaliteta želi provjeriti izdržljivost lampi (Izdržljivost se testira tako što se lampa ostavi da neprekidno gori i bilježi vrijeme dok ne pregori). Da bi to uradio, testira 200 lampi iz dnevne proizvodnje.
   a) Koja je populacija u ovom istraživanju, šta je uzorak i koja je karakteristika koja se proučava?
   b) Objasni koji od sljedećih opisa predstavlja uzorak ove populacije, a koji ne.
      1) 200 testiranih lampi iz dnevne proizvodnje.
      2) Sve lampe proizvedene u prvom satu rada fabrike.
      3) Sve lampe proizvedene u jednom danu.
      4) Oblik lampi koje se testiraju.
      5) Prvih 100 lampi koje su izašle sa proizvodne trake poslije pauze radnika.
   c) Kontrolor kvaliteta razmatra da li da testira svih 50 000 sijalica (cijelu populaciju) ili da uzme uzorak od 500 sijalica.
      1) Navedi dvije prednosti testiranja svih 50 000 sijalica.
      2) Navedi dva nedostatka testiranja svih 50.000 sijalica.

4. Odredi da li u istraživanju treba koristiti popis ili uzorak:
   a) uzrast ljudi koji su posjetili nacionalni park,
   b) ispravnost baterija proizvedenih u fabrici,
   c) cijene usluga u salonu ljepote.

5. Rukovodilac autobuske stanice želi provesti istraživanje kako bi vidio da li su ljudi zadovoljni njihovim uslugama. Odlučuje da pita prvih 10 ljudi koji stignu na autobusku stanicu u srijedu ujutro.
   a) Da li je izabrao dobar uzorak? Objasni svoj odgovor.
   b) Kako bi mogao poboljšati svoj metod u prikupljanju podataka?

6. Jedne novine su pozvale čitaoce da odgovore na telefonsku anketu u vezi sa sigurnošću saobraćaja u gradu. Anketirano je 40 ispitanika.
   a) Da li je izbor uzorka na ovaj način prikladan? Objasni svoj odgovor.
   b) Navedi nekoliko razloga zašto rezultati ove ankete nisu pouzdani i predloži izmjene kako bi se dobio reprezentativan uzorak.

7. Učenici iz ekološkog kluba bi htjeli saznati kakav je kvalitet zraka oko njihove škole. Oni imaju mali uređaj koji mjeri koncentraciju čestica u zraku (PM-čestica). Uređaj mogu postaviti na različitim lokacijama po dvorištu i ulicama u okolini.
   a) Koja je populacija, uzorak i karakteristika ovog istraživanja?
   b) Opiši najmanje dva različita uzorka koja se mogu uzeti iz iste populacije?
   c) Objasni prednosti i nedostatke mjerenja kvaliteta zraka na svakoj mogućoj lokaciji oko škole (popis).
   č) Izaberi uzorak za koji smatraš da je najreprezentativniji za cijelu populaciju i objasni zašto.

Istraživanje

Svi mi gotovo svakodnevno provjeravamo vremensku prognozu.
Istraži kako meteorolozi pripremaju vremensku prognozu.
Procijeni da li su sljedeće izjave vjerodostojne i obrazloži svoj odgovor:

a) Prosječna temperatura u gradu danas je 25 °C (mjereno sa 2 termometra).
b) Juli je najtopliji mjesec u godini (na osnovu desetogodišnjih mjerenja).
c) Danas će padati kiša u svim dijelovima grada (prognoza na osnovu satelitskih snimaka).
č) Objasni odgovore na sljedeća pitanja:
   - Zašto meteorolozi postavljaju termometre na različitim visinama i lokacijama?
   - Kako veličina uzorka utiče na tačnost vremenske prognoze?
   - Šta bi se desilo ako bi koristili samo mjerenja sa jednog termometra za cijeli grad?

2. DISKRETNI PODACI. TABELA FREKVENCIJA

Aktivnost

a) Koja je populacija i koja je njena karakteristika u svakom od datih primjera?

b) Kako su izražene karakteristike u svakom od primjera (brojem, opisom, kategorijom)?

1) Na sistematskom pregledu izmjerena je visina učenika u jednom odjeljenju.

2) U botaničkoj bašti zabilježena je boja cvjetova nekoliko vrsta cvijeća.

3) U fabrici za proizvodnju frižidera provjerava se ispravnost dobijenih proizvoda.

Prema načinu izražavanja, obilježja mogu biti veoma različite.
Ako je obilježje izraženo **opisno**, kažemo da je to **kvalitativno obilježje**.
Ako je obilježje izraženo **brojem**, onda kažemo da je to **kvantitativno obilježje**.

Primjer 1

Da li su kvalitativna ili kvantitativna obilježja aktivnosti data na početku časa?

1) U ovom slučaju, karakteristika je izražena brojem jer se radi o visini učenika, koja može biti bilo koji broj iz intervala vrijednosti.
Znači, karakteristika je kvantitativna.

2) Boja cvjetova je kvalitativna karakteristika jer je izražena opisno.

3) Karakteristika je kvalitativna i može se opisno izraziti sa dvije kategorije: ispravan ili neispravan proizvod.

Primjer 2

Koje brojčane vrijednosti se mogu koristiti za izražavanje sljedećih karakteristika:

a) dužina atletske staze, b) vrijeme putovanja u satima,
c) broj članova porodice, č) visina drveća,
ć) broj izostanaka iz škole.

U slučajevima pod a), b), č) date karakteristike mogu imati vrijednosti nekog intervala, na primjer dužina atletske staze može biti 234 m.
Ovi podaci se prikupljaju mjerenjem.
Karakteristike pod c) i ć) mogu imati vrijednosti kao što su 1, 2, 3, ... tj. prirodni brojevi. Ovi podaci se prvenstveno prikupljaju **brojanjem**.

Diskretni podaci su podaci koji mogu imati samo određene, prebrojive vrijednosti.

Drugi primjeri diskretnih podataka su: broj učenika, broj automobila, veličina odjeće izražena kao broj i njima slični, odnosno podaci koji imaju tačnu, preciznu, jasno definiranu vrijednost koja se zna sa sigurnošću.
Za razliku od njih, ljudska visina, temperatura zraka, tjelesna masa i drugi mogu biti bilo koji decimalni broj iz nekog intervala vrijednosti.

Zadatak 1

Koji od sljedećih podataka su diskretni:

a) vrijeme u minutama trkača u jednoj trci,

b) broj pješačenja tokom jedne sedmice stanovnika jednog naselja,

c) broj proizvoda koji se kupuju u marketu,

č) dužina stopala trinaestogodišnjaka,

ć) debljina knjiga u školskoj biblioteci,

d) dužina boravka u hotelu izražena brojem punih pansiona?

Neuređeni podaci, posebno ako je njihov broj veliki, ne govore mnogo o populaciji koja se istražuje. Zato ih je potrebno srediti. Prvo što treba uraditi jeste njihovo raspoređivanje, na sljedeći način:

- podaci čije su vrijednosti date opisno (riječima) klasificiraju se u kategorije;
- podaci čije su vrijednosti date numerički (brojevima) raspoređuju se po veličini, od najmanje do najveće;
- podaci čije su vrijednosti date numerički (brojevima) i imaju mali broj ponovljenih vrijednosti grupiraju se u intervale u tabeli.

U sva tri slučaja, radi lakšeg sređivanja, neposredno pored vrijednosti (rezultata) svako ponavljanje istog podatka označava se znakom (crticom).

Primjer 3

Prilikom istraživanja brzine reakcije grupe od 10 učenika, dobijeni su sljedeći podaci:

učenik	Pero	Tome	Ana	Risto	Kire	Sime	Ema	Ilir	Ajše	Ile
brzina reakcije	brzo	sporo	brzo	brzo	brzo	sporo	brzo	brzo	sporo	brzo

Sredi podatke u tabeli.

Podaci (rezultati) su dati bez ikakve sistematičnosti i preglednosti. Brojanjem se utvrđuje koja se vrijednost (brza, spora) koliko puta javlja. Sastavljamo sljedeću tabelu:

brzina reakcije	znak	broj učenika
brza reakcija	𝍸 II	7
spora reakcija	III	3

Zadatak 2

Prilikom jednog istraživanja o dominantnoj ruci u radu sa 16 djece u jednom odjeljenju osnovne škole, dobijeni su sljedeći podaci:

dijete	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Dominant-na ruka	desna	desna	desna	lijeva	lijeva	desna	lijeva	desna	lijeva	desna	desna	desna	lijeva	obje	obje	obje

a) Poredaj podatke u tabeli.
b) Koja je ruka dominantna?
c) Da li možeš donijeti i druge zaključke?

Primjer 4

U odjeljenju Agnese, njeni školski drugovi su razgovarali o tome ko može da roni i koliko dugo može zadržati dah pod vodom. Agnesa je odlučila da zapiše podatke o tome koliko dugo drugovi mogu zadržati dah:

11, 17, 21, 35, 24, 14, 18, 22, 33, 42, 23, 19, 14, 24, 17, 12, 13, 18, 19, 22, 21, 24, 14, 17

Odgovori na sljedeća pitanja:
a) Koliko je učenika uspjelo zadržati dah duže od 30 sekundi?
b) Koliko je učenika uspjelo zadržati dah duže od 20, a najviše 40 sekundi?
c) Koliko je najduže vrijeme koje jedan učenik može zadržati dah?

Dobijeni podaci imaju mali broj ponovljenih vrijednosti, odnosno bez sređivanja tabela će sadržavati mnogo redova ili kolona, tako da nije mnogo korisna.
Zato je ovdje bolje da se podaci **grupiraju**, odnosno da se napravi **tabela frekvencija sa grupiranim podacima**.
Pritom je važno da pojedinačne grupe ne sadrže vrijednosti koje pripadaju dvjema susjednim grupama, odnosno dvije uzastopne grupe ne mogu biti:
10–20 i 20–30 sekundi (podatak veličine 20 s smije pripadati samo jednoj takvoj grupi).
Znači, grupe moraju biti disjunktne i trebaju imati jednake dužine.

broj sekundi	frekvencija
11-20	13
21-30	8
31-40	2
41-50	1

Iz dobijene tabele frekvencija sa grupiranim podacima možemo vidjeti koliko učenika može zadržati dah duže od 30 sekundi.
To su učenici iz posljednje dvije grupe vrijednosti, odnosno $2 + 1 = 3$ učenika.
Više od 20, a najviše 40 sekundi izdržava 10 učenika, a samo 1 učenik može izdržati više od 40 sekundi.

Prilikom izrade tabele grupiranih podataka treba obratiti pažnju na sljedeće:
- intervali (grupe) trebaju biti iste dužine,
- ne smije biti „preklapanja" intervala,
- ne smije biti „praznina" između intervala.

Zadatak 3

Merita istražuje broj mahuna na biljkama u svom stakleniku. Pripremila je tabelu za bilježenje:

broj mahuna	crtice	frekvencija
15-20		
20-30		
35-40		
40-50		

Pronađi dvije nepravilnosti u tabeli, precrtaj tabelu i ispravi nepravilnosti.

Zadatak 4

Rezultati dobijeni na testu iz matematike za 50 učenika iz dva osma odjeljenja su sljedeći:

35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 52, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.

Predstavi podatke u tabeli frekvencija sa grupiranim podacima.

Zadatak 5

Određeni broj učenika iz jedne škole anketiran je o udaljenosti između njihovog doma i škole i dobijeni su sljedeći rezultati:

udaljenost (u km)	znak	broj učenika
$0 < s \leq 1$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$1 < s \leq 2$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	
$2 < s \leq 3$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$3 < s \leq 4$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$4 < s \leq 5$	𝍸 𝍸 II	

Dopuni tabelu, a zatim odgovori na pitanja:

a) Da li možeš iz tabele utvrditi koja je najkraća udaljenost koju učenik pređe od kuće do škole? Objasni svoj odgovor.

b) U kom intervalu udaljenosti se nalazi najveći broj učenika?

c) Koliko učenika živi na udaljenosti od 3 km ili kraće?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Folklorna grupa bilježi učešće svojih članova. Pritom prikuplja podatke o:

a) vremenu članstva u grupi,

b) broju proba koje posjećuju sedmično,

c) broju koreografija na kojima su radili,

č) visini svakog člana folklorne grupe,

ć) masi svakog člana folklorne grupe,

d) uzrastu svakog člana.

Odredi koje od tvrdnji predstavljaju primjere diskretnih podataka i objasni svoj odgovor.

2. Dat je broj dana boravka u hotelu za 40 gostiju:

1, 4, 14, 13, 15, 2, 7, 7, 12, 10, 17, 16, 10, 8, 9, 1, 3, 5, 6, 12, 16, 16, 4, 9, 7, 5, 12, 11, 9, 8, 2, 1, 12, 15, 3, 4, 8, 12, 4, 15.

a) Kolika je populacija i koje su njene karakteristike?

b) Da li su prikupljeni podaci diskretni ili ne?

c) Pronađi nepravilnosti u tabeli frekvencija, prepiši je u svoju svesku, ispravi je i dopuni.

broj dana boravka	frekvencija
1-3	
4-7	
9-12	
12-14	
15-17	

3. Zbog neophodnog ukoričavanja i obnavljanja starih knjiga, u školskoj biblioteci izmjerena je debljina nekoliko knjiga u centimetrima. Dobijene vrijednosti su:

2,4	3,2	0,3	0,8	1,1	1,4	2,3	2,9	0,4	1
1,2	2,6	2,5	2,1	0,9	1,4	1,1	2	2,2	3

a) Da li su dobijeni podaci diskretni? Objasni!

b) Predstavi dobijene podatke tabelom frekvencija.
Koja je karakteristika koju zapisuješ u tabelu?

4. Slave mjeri vremena (t u minutama) koja su potrebna nekim njegovim drugovima da stignu od kuće do gradskog bazena. Andrej broji koliko dužina (n) svaki od njegovih drugova prepliva dnevno.

Podaci koje je prikupio Slave:

24, 18, 25, 6, 31, 20, 17, 29, 37, 7, 23, 46, 30, 33, 19, 41, 15, 45, 21, 32

Podaci koje je prikupio Andrej:

0, 1, 5, 6, 3, 2, 1, 2, 0, 4, 2, 4, 3, 0, 1, 4, 5, 7, 4, 3

a) Koji od njih je prikupio diskretne podatke? Objasni svoj odgovor.

b) Zapiši vremena koja je zabilježio Slave u tabelu frekvencije poput date, koju ćeš prepisati u svoju svesku.

vrijeme, t (minute)	znak	frekvencija
$0 < t \leq 10$		
$11 < t \leq 20$		
$20 < t \leq 30$		
$30 < t \leq 40$		
$40 < t \leq 50$		

c) Zapiši podatke koje je Andrej prikupio u tabelu poput date, koju ćeš prepisati u svoju svesku.

preplivane dužine, n	znak	frekvencija
0-2		
3-5		
6-8		

č) Uporedi tabele pod b) i c) i navedi nekoliko razlika među njima.

5. Visine učenika u razredu, izražene u cm, su sljedeće:

149, 148, 152, 146, 152, 152, 146, 148, 149, 151, 152, 146, 146, 149, 153, 146, 153, 148, 151, 152, 151, 152, 152, 152, 152, 148, 152, 148, 152, 146, 149.

a) Prikaži ih u tabeli frekvencija.

b) Koja je najveća visina učenika u razredu? Da li ima više od jednog učenika te visine?

c) Kojih učenika ima više, onih sa najmanjom ili sa najvećom visinom u razredu?

č) Da li ima učenika čija je visina manja od 144 cm?

ć) Koliko učenika ima visinu veću od 145 cm i manju od 156 cm?

6. Za svaki dan u proteklom mjesecu pronađi broj drugova iz odjeljenja koji su bili odsutni iz škole.

a) Napravi tabelu frekvencija sa grupiranim podacima.

b) Koliko je učenika bilo odsutno duže od 3 dana tokom mjeseca?

c) Da li ima učenika koji uopšte nisu bili odsutni?

č) Koliko je učenika odsustvovalo tačno 7 dana?

Istraživanje

Istraži da li postoji veza između tjelesne mase i navika u ishrani među učenicima u tvom odjeljenju. Prikupi podatke o:

a) visini i tjelesnoj težini (da bi izračunao/la indeks tjelesne mase),
b) broju obroka tokom dana i
c) da li su obroci pretežno zdravi ili nezdravi,
č) napravi tabele frekvencija sa grupiranim podacima,
ć) pokušaj protumačiti rezultate kako bi otkrio/la da li ishrana utiče na indeks tjelesne mase.

3. PLANIRANJE ISTRAŽIVANJA I PRIKUPLJANJE PODATAKA

Aktivnost

Za nekoliko mjeseci od sada imaš rezervisanu kartu za putovanje u mjesto u koje nikada nisi bio.
a) Kako ćeš se pripremiti za putovanje u pogledu odjeće, obuće, hrane itd.?
b) Koje ćeš podatke prikupiti prije nego što kreneš?
c) Kako ćeš isplanirati putovanje?

Da bismo dobili informacije o nekim drugim stanjima i pojavama, potrebno je prikupiti i analizirati podatke koji predstavljaju ta stanja i pojave. Za uspješnu analizu podataka važno je da prvo isplaniramo koji su nam podaci potrebni i kako ćemo ih prikupljati, a to treba uraditi u skladu s postavljenim zahtjevima i uslovima zadatka.
Istraživanje u kojem vršimo prikupljanje, sređivanje, predstavljanje (prikazivanje) i analizu podataka naziva se **statističko istraživanje**.
Da bi statističko istraživanje, prilikom rješavanja određenog problema, bilo uspješno, potrebno je napraviti dobar plan za njegovo provođenje, najčešće kroz sljedeće korake:

1) Identifikacija problema koji istražujemo, zajedno s pitanjima na koja istraživanje treba pružiti odgovore.
2) Prikupljanje i sređivanje podataka.
3) Predstavljanje podataka.
4) Analiza podataka i donošenje odgovarajućih zaključaka.

1) Identifikovanje problema koji istražujemo, zajedno s pitanjima na koja istraživanje treba pružiti odgovore

Primjer 1

Jovana bi htjela istražiti koji je rukometni tim postigao najviše golova na Svjetskom prvenstvu. Kako da Jovana započne svoje istraživanje?

Da bi saznala podatke koji su joj potrebni, Jovana može prisustvovati svim utakmicama i zabilježiti rezultate, a zatim ih obrađivati. Ali to nije uvijek moguće. Naime, neke utakmice održavaju se u isto vrijeme i ona mora uspjeti nabaviti kartu za svaku utakmicu. Iz istog razloga ne može pratiti sve utakmice na televiziji. Najbolji izbor za prikupljanje podataka bilo bi praćenje rezultata svih utakmica na zvaničnoj stranici prvenstva.

2) Prikupljanje i sređivanje podataka

Prikupljanje podataka može biti iz različitih izvora podataka.

- **Primarni podaci** su podaci koje smo sami direktno dobili koristeći neki od načina – metoda prikupljanja podataka.
- Ali naši skupovi podataka mogu sadržavati i podatke koje su prethodno prikupili drugi istraživači, odnosno koje je prethodno prikupio neko drugi. Takve podatke nazivamo **sekundarnim podacima**.

Primjer 2

Mustafa želi otvoriti posao – biznis u svom malom naselju. Da bi odlučio koja će vrsta posla biti najpotrebnija i najisplativija, potrebni su mu podaci o uzrastu i interesovanjima lokalnog stanovništva. Mustafa treba odlučiti da li će prikupljati primarne podatke ili sekundarne podatke. Koje su prednosti, a koji nedostaci svakog od načina prikupljanja podataka koje Mustafa može primijeniti?

Svaki pristup ima svoje prednosti i nedostatke.

1) Prikupljanje primarnih podataka (direktnim postavljanjem pitanja stanovnicima)

Prednosti:
- podaci su svježi i aktuelni,
- Mustafa dobija tačne informacije posebno za svoje malo naselje,
- može postaviti dodatna pitanja ako nešto nije jasno,
- dobijeni podaci prilagođeni su cilju – poslovnom planu.

Nedostaci:
- potrebno je vrijeme da bi se anketirao dovoljan broj ljudi,
- potrebno je više truda i organizacije (izrada upitnika, obrada podataka),
- neki ljudi možda neće htjeti odgovoriti,
- može doći do grešaka prilikom prikupljanja i unosa podataka.

2) Prikupljanje sekundarnih podataka (internet, statistički zavod, prethodna istraživanja, publikacije)

Prednosti:
- podaci su brzo dostupni,
- nema potrebe za anketama i direktnim kontaktom s ljudima,
- niži troškovi i manje truda za prikupljanje podataka,
- mogu se koristiti podaci iz profesionalnih istraživanja.

Nedostaci:
- podaci možda nisu samo za njegovo malo naselje, već i šire,
- mogu biti stari ili zastarjeli,
- nisu prilagođeni njegovoj konkretnoj poslovnoj ideji,
- mogu nedostajati upravo one informacije koje su mu potrebne (na primjer: interesovanja, navike).

Ako Mustafa želi precizniji poslovni plan, najbolje je da kombinuje primarne i sekundarne podatke – prvo da pogleda statistiku, a zatim da napravi kratku anketu u svom malom naselju.

Zadatak 1

Koji bi se podaci koristili (primarni ili sekundarni) za istraživanje:

a) ocjena iz historije u tvom odjeljenju,
b) navika recikliranja u tvom mjestu stanovanja,
c) navika recikliranja u zemlji,
č) vremenskih uslova.

Objasni svoj odgovor.

Prikupljanje podataka za dati problem koji se istražuje možemo provesti na nekoliko načina: posmatranjem, mjerenjem, upitnikom, poređenjem, brojanjem i drugim načinima.
Da bi se olakšao proces prikupljanja podataka i njihove obrade, potrebno je pripremiti najbolje moguće **instrumente** za prikupljanje podataka.
Instrumenti trebaju biti jednostavni i praktični za korištenje i pružati sve potrebne informacije.
Neki od najčešće korištenih instrumenata su: **posmatranje, anketa, intervju, kontrolna lista, kontrolna lista sa skalom za procjenu, upitnik za:** činjenice, stavove, mišljenja ili interesovanja itd.
Kada prikupimo podatke, grupišemo ih, odnosno sređujemo ih u odgovarajuće kategorije.

Primjer 3

Učenici osmog razreda osnovne škole trebaju prikupiti podatke o udaljenosti svojih domova od škole i načinu na koji dolaze do škole. Zato su pripremili upitnik u kojem će svaki učenik odgovoriti na nekoliko pitanja. Pitanja se mogu postavljati izborom, sabiranjem, zaokruživanjem i drugim metodama.

UPITNIK

Ime i prezime učenika:

_____

Razred: 1. VII a 2. VII b 3. VII c

Izaberi odgovor zaokruživanjem slova ili broja ispred odgovarajućeg odgovora.

1. Udaljenost od moje kuće do škole je približno:

1. 100 m 2. 200 m 3. 300 m 4. 400 m 5. 500 m
6. 600 m 7. 700 m 8. 800 m 9. 900 m 10. 1km
11. Između 1 km i 2 km 12. Više od 2 km

2. Do škole dolazim:

1. Pješice 2. Biciklom
3. Autom 4. Autobusom

Često se izbor može izvršiti unošenjem znaka ☑ ili znaka ☒.

Upitnici trebaju ispunjavati nekoliko uslova kako bismo bili sigurni da će dati pravu sliku o problemu koji se istražuje. Pitanja ne smiju biti sugestivna, uvredljiva, dugačka ili nerazumljiva, a najbolje je da budu testirana prije upotrebe.

Zadatak 2

Vlatko želi istražiti koliko učenika u njegovoj školi svira jedan ili više muzičkih instrumenata i koji su to instrumenti.

a) Koje instrumente za prikupljanje podataka Vlatko može koristiti?

b) Da li su prikupljeni podaci primarni ili sekundarni?

Primjer 4

Ilija želi otkriti koliko vremena učenici u njegovom razredu provode gledajući televiziju. On razmišlja o dva moguća pitanja za prikupljanje podataka:

1) Koliko gledaš TV?

2) Koliko sati provodiš gledajući televiziju?

Pronađi po jednu primjedbu za svako od pitanja i napiši bolje pitanje koje bi Ilija mogao koristiti.

U pitanju 1) nije jasno kakva se vrsta odgovora traži, pa dobijeni odgovori mogu biti „mnogo" ili „ne mnogo", što ne daje jasnu sliku o problemu koji se istražuje.

I pitanje 1) i pitanje 2) nemaju određen vremenski period na koji se odnose, pa neko od ispitanika može odgovoriti 3 sata u jednom danu, a drugi 3 sata u jednom mjesecu, što opet ne daje jasnu sliku o pitanju koje se istražuje.

Najbolje je postaviti pitanje sa nekoliko ponuđenih opcija za mogući odgovor i uključiti vremenski period na koji se odnosi, na primjer:
Koliko sati si gledao/la TV tokom jučerašnjeg dana?

- uopšte ne
- manje od 1 sata
- od 1 do 2 sata
- više od 2 sata

U ovom slučaju treba voditi računa da polja za odgovore sadrže izjave koje nemaju praznine ili preklapanja i da uključuju cijeli spektar odgovora.

Zadatak 3

Lara je sastavila instrument za prikupljanje podataka kako bi istražila koliko često ljudi koriste javni prevoz. Navedi neke negativne aspekte ovog upitnika i predloži novi i poboljšani instrument za prikupljanje podataka.

UPITNIK

Ime i prezime:

_____

Koliko često koristiš javni prevoz?

- nikad
- ponekad
- često
- uvijek

Primjer 5

Menadžer marketa istražuje koliko se pakovanja žitarica dnevno proda od tri različita proizvođača. Kako može prikupiti podatke?

U ovom slučaju podaci se prikupljaju **posmatranjem** i **brojanjem**. Dobijene informacije mogu se prikazati u tabeli ili grafički, što će kasnije biti korišteno za analizu i donošenje odgovarajućih zaključaka.

3) Predstavljanje podataka

Rezultate sređivanja podataka, izražene brojevima, pregledno prikazujemo u tabeli, koja je najčešće sastavljena od pravougaonih polja dobijenih ukrštanjem horizontalnih i vertikalnih linija. Ovaj način predstavljanja može biti nepregledan. Pored izrade tabele, drugi način predstavljanja podataka je grafički, koji koristimo za slikovito predstavljanje sređenih podataka.

Primjer 6

Potrebno je istražiti proizvodnju poljoprivrednih proizvoda (paradajza i kupusa) na farmi sa četiri zasebne parcele. Dvije od parcela su obične, dvije sa plastenicima. Na koji način može da se istraži sljedeće:

a) Koliko kilograma paradajza i kupusa se proizvede dnevno sa svake pojedinačne parcele?

b) Da li postoji zavisnost dobijene količine svakog proizvoda od toga da li je parcela obična ili sa plastenicima?

c) Zavisnost dobijene količine proizvoda od zasađene sorte proizvoda.

a) Da bi se odgovorilo na pitanje, potrebno je tokom dužeg perioda svakodnevno prikupljati podatke o dobijenoj količini proizvoda sa svake parcele, mjerenjem. Zatim podatke treba srediti i grupisati u zavisnosti od vrste parcele i sorte proizvoda.

U odnosu na sređivanje podataka, najpreglednije je da se srede u tabele. Na primjer, tabela za proizvedenu količinu u odnosu na parcelu:

	parcela 1 obična	parcela 2 obična	parcela 3 plastenici	parcela 4 plastenici
paradajz	200 kg	250 kg	300 kg	400 kg
kupus	250 kg	400 kg	450 kg	600 kg

b) Za svaki od posmatranih poljoprivrednih proizvoda mogu se izdvojiti dnevne količine dobijene sa različitih parcela kako bi se odgovorilo na pitanje da li postoji zavisnost proizvodnje od vrste parcele.

c) Na kraju, analizom prikupljenih, a zatim i sređenih podataka u vezi sa sortom proizvoda i dobijenom količinom mogu se izvući odgovarajući odgovori na postavljeno pitanje.

4) Analiza podataka i izvođenje odgovarajućih zaključaka

U ovom koraku analiziramo podatke iz tabelarnog i grafičkog prikaza, dajemo odgovore na postavljena pitanja i izvodimo odgovarajuće zaključke.
Grafički (slikovni) prikaz podataka često pomaže pri njihovoj analizi.
O analizi podataka govorit ćemo kasnije.

Primjer 7

Potrebno je da provedeš malo istraživanje o navikama učenika u tvom odjeljenju u vezi s upotrebom telefona, tableta i računara. Zapiši i objasni sve korake plana istraživanja.

Svi koraci plana provođenja istraživanja dati su redom:

1) Plan istraživanja treba sadržavati odgovore na sljedeća pitanja:

- Šta želiš saznati? (istraživačko pitanje: Koliko vremena učenici u mom odjeljenju koriste digitalne uređaje tokom jednog dana?)
- Koje ćeš učenike uključiti? (koliko ljudi, iz kojeg odjeljenja, iz kojeg mjesta)
- Koje ćeš podatke prikupljati? (npr. vrijeme korištenja, za šta koriste uređaje,...)
- Koliko vremena će trajati istraživanje?

2) Svakako da je od velikog značaja izbor odgovarajućeg instrumenta za prikupljanje podataka, koji može biti anketa (putem pripremljenog upitnika), tabela za dnevno bilježenje ili intervju s nekoliko učenika. Evo nekoliko primjera pitanja koja se mogu staviti u upitnik:

- Koliko sati dnevno u prosjeku koristiš digitalne uređaje:
  a) manje od 2 sata, b) od 2 do 4 sata, c) više od 4 sata?
- Za šta ih najčešće koristiš? (učenje, igre, društvene mreže...)
- Kada najčešće koristiš svoje uređaje:
  a) prije škole, b) za vrijeme školskih odmora,
  c) odmah poslije škole, č) kasno uveče prije spavanja?

Na ovaj način prikupio bi primarne podatke. Ukoliko tokom svog istraživanja koristiš sekundarne podatke, tada možeš potražiti statistiku na internetu: koliko vremena u prosjeku tinejdžeri koriste digitalne uređaje u Makedoniji ili u svijetu?

3) Kada se podaci prikupe, radi veće preglednosti mogu se organizovati u tabele i/ili predstaviti grafički.
4) Analiza dobijenih podataka može biti u obliku kratkog teksta sa zaključcima u vezi s pitanjima kao što su sljedeća: Šta sam otkrio/la? Šta znače rezultati?

Zadatak 4

Napravi plan za prikupljanje podataka o tome koliko svog slobodnog vremena učenici u tvom razredu provode baveći se sportom. Koje su prednosti, a koji nedostaci korištenja intervjua ili upitnika za prikupljanje potrebnih podataka?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Lirim prikuplja informacije o sredstvima (novcu) koja učenici u njegovom odjeljenju svakodnevno troše. Napravi instrument pomoću kojeg Lirim može prikupiti podatke. Da li su prikupljeni podaci primarni ili sekundarni?
2. Blagoje želi istražiti koliko voća i povrća učenici u njegovoj školi koriste u ishrani. Koje instrumente za prikupljanje podataka može koristiti? Koja pitanja treba postaviti? Sastavi odgovarajući upitnik. Da li imaš ideju kako Blagoje može predstaviti podatke?
3. Napravi plan za prikupljanje podataka o broju pročitanih knjiga tokom raspusta među učenicima u tvom razredu. Koje instrumente za prikupljanje podataka ćeš koristiti? Da li su prikupljeni podaci primarni ili sekundarni?
4. Napravi plan za prikupljanje podataka o maksimalnim i minimalnim dnevnim temperaturama tokom proteklog mjeseca.
5. Napravi plan za prikupljanje podataka o uspješnosti reprezentativnih golmana u Evropskoj rukometnoj ligi.

Istraživanje

Napravi plan istraživanja i prikupi podatke o tome koliko su učenici osmog razreda u tvojoj školi fizički aktivni svakodnevno.

4. DIJAGRAMI

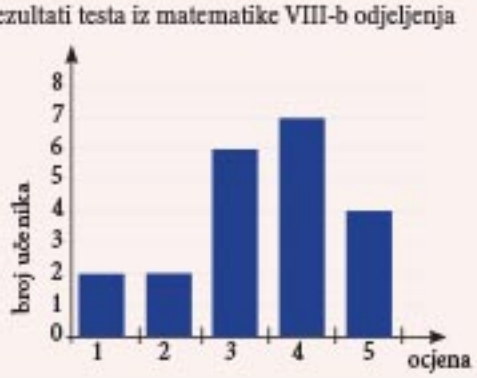
Aktivnost

Na dijagramu na crtežu 1 prikazani su rezultati testa iz matematike u VIII-b odjeljenju.

a) Koliko je učenika dobilo ocjenu 5?

b) Koliko je učenika dobilo ocjenu 1 ili 2?

c) Koju ocjenu je dobila većina učenika?



Crtež 1

Ako želimo da lako i brzo izvedemo zaključke iz prikupljenih podataka, potrebno je da ih predstavimo na jasan i jednostavan način. To ćemo postići grafičkim prikazom pomoću dijagrama.

Skeniraj kod i pregledaj dijagrame.

Primjer 1

U jednom odjeljenju ima 36 učenika, od kojih je 15 djevojčica. Prikaži polnu strukturu odjeljenja sektorskim dijagramom.

Postoje dvije mogućnosti za obilježje pola – muški i ženski, tako da će dijagram imati dvije kategorije: dječaci i djevojčice.
Broj dječaka je $36 - 15 = 21$ dječak (crtež 2).
Prema tome, kružni dijagram bit će podijeljen na dva dijela (sektora).
Da bi se odredila veličina svakog od dijelova, prvo treba odrediti ugao dijela punog ugla koji predstavlja jednog učenika.
Taj ugao je $360° : 36 = 10°$, tako da će dijelovi na sektorskom dijagramu obuhvatati sljedeće uglove:

- za djevojčice $10° \cdot 15 = 150°$
- za dječake $10° \cdot 21 = 210°$

Kružni dijagram će biti:



Crtež 2

Drugi način:

Podjela sektora ponekad se može jednostavnije izvršiti i pomoću dijelova izraženih u razlomcima, tako da:

- djevojčice predstavljaju $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ kruga, a u stepenima je $\frac{5\cdot 360^\circ}{12}=150^\circ$.
- dječaci predstavljaju $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$ kruga, što je $\frac{7\cdot 360^\circ}{12}=210^\circ$.

Isti dijagram će se dobiti ukoliko krug podijelimo na 12 jednakih dijelova i odgovarajućih sedam dijelova označimo za dječake, a pet dijelova za djevojčice.

Skeniraj kod i pregledaj dijagrame.

Zadatak 1

Raspodjela Petrovih ukupnih novčanih sredstava za mjesec mart prikazana je u tabeli.

a) Precrtaj tabelu u svoju svesku i dopuni je.

b) Nacrtaj sektorski dijagram na osnovu podataka iz nje. Zapiši svaki od dijelova sektorskog dijagrama i u obliku razlomaka, kao dijelove kruga.

	denara	%	ugao
zakupnina	1800		
hrana	6000		
prevoz	950		
ostalo	1000		
ušteđevina	250		

Zadatak 2

Na sektorskom dijagramu, na crtežu 3, prikazana je raspodjela sredstava općinskog šahovskog udruženja za organizaciju i provođenje šahovskog turnira. Ako je ukupan budžet koji je udruženje imalo na raspolaganju iznosio 60000 denara, izračunaj koliko sredstava pripada svakoj kategoriji troškova.



Crtež 3

Primjer 2

Pri jednom istraživanju o interesovanju za određene žanrove filmova ispitano je 90 odraslih osoba i 120 djece. Na crtežu 4 dati su sektorski dijagrami dobijeni nakon sređivanja podataka.



Crtež 4

a) Koliki procenat djece voli gledati komedije?
b) Koliko odraslih voli filmove s historijskim sadržajem?
c) Koliko više djece nego odraslih preferira naučnu fantastiku?
č) Sektor za avanturističke filmove iste je veličine kod odraslih i kod djece.

Objasni kako ćeš bez računanja znati da više djece nego odraslih preferira avanturističke filmove?

a) Sektor djece koja vole komediju ima centralni ugao 45°, a cijelom uzorku odgovara puni ugao od 360°, od čega za procentualno učešće dobijamo $\frac{45}{360} = 0{,}125 = 12{,}5\%$.
Dakle, 12,5% djece voli komediju.

b) Pošto uzorak odraslih ispitanika broji 90 osoba, centralni ugao koji odgovara jednoj odrasloj osobi iznosi $360° : 90 = 4°$, prema tome ugao od 120° koji odgovara dijelu uzorka odraslih koji najviše vole filmove s historijskim sadržajem odgovara broju od 30 osoba ($120° : 4° = 30$ osoba).

c) Odraslih koji vole gledati naučnofantastične filmove ima $24° : 4° = 6$.
Sada ćemo prvo odrediti centralni ugao za jedno dijete, $360° : 120 = 3°$, od čega broj djece koja vole naučnu fantastiku iznosi $120° : 3° = 40$. Tada je $40 - 6 = 34$, odnosno 34 djece više nego odraslih voli naučnu fantastiku.

č) Sektor za avanturističke filmove iste je veličine kod odraslih i kod djece, ali uzorak djece veći je u poređenju s uzorkom odraslih, puni ugao od 360° u prvom slučaju kod odraslih predstavlja manji broj (90 odraslih), dok isti ugao od 360° odgovara većem broju djece – 120. Prema tome, jednaki uglovi za avanturističke filmove (36°) odgovaraju većem broju djece nego odraslih.

Zadatak 3

Tabele prikazuju starosnu strukturu stanovnika dva grada. Nacrtaj sektorski dijagram za svaki grad i uporedi starosne strukture dva grada. Odgovori na sljedeća pitanja:

grad X	%
0-14	28
15-24	21
25-54	38
55-64	7
65 i više	6

grad Y	%
0-14	14
15-24	12
25-54	43
55-64	12
65 i više	19

Skeniraj kod i razgledaj dijagrame.

a) Koliko osoba ima od 25 do 54 godine u gradu X?
b) Koliki procenat stanovništva u gradu Y stariji je od 55 godina?
c) Ako grad X ima 30000 stanovnika, a grad Y ima 60000 stanovnika, kako ćeš bez računanja znati koje starosne grupe u oba grada imaju istu zastupljenost?

Primjer 3

U tabeli je data zavisnost između mjera za dužinu: centimetara i milimetara.

cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
mm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

a) Prikaži zavisnost između mjera za dužinu – centimetara i milimetara pomoću linijskog dijagrama.
b) S linijskog dijagrama pročitaj koliko je milimetara 35 cm.
c) S linijskog dijagrama pročitaj broj milimetara u centimetrima za sljedeće vrijednosti: 200, 320 i 470.

a) Da bi se grafički prikazali podaci na koordinatnom sistemu, na x-osi se nanose centimetri, a na y-osi milimetri (crtež 5).
b) Da bi se s linijskog dijagrama pročitala dimenzija od 35 cm u mm, na x-osi se nanosi 35 cm i iz te tačke se podiže normala. Kroz presječnu tačku M normale i linijskog dijagrama povlači se prava, paralelna s x-osom, koja u presjeku s y-osom daje tačku koja odgovara 35 cm u mm.
c) Slično kao pod b), ali sada polazeći od vrijednosti date u mm na y-osi, s linijskog dijagrama može se pročitati da 200 (u mm) odgovara 20 (u cm).
Iz crteža 5 možeš uočiti da između vrijednosti dužine izražene u centimetrima i izražene u milimetrima postoji direktno proporcionalna zavisnost i ona se može zapisati kao $y = 10\,x$, gdje je y vrijednost dužine izražena u milimetrima, a x vrijednost dužine izražena u centimetrima.



crtež 5

Skeniraj kod i razgledaj dijagrame.

Zadatak 4

Na dijagramu na crtežu 6 data je količina padavina u Resenu i Radovišu izražena u milimetrima po metru kvadratnom u određenim godinama. Odgovori:

a) Kada je zabilježeno najviše, a kada najmanje padavina u svakom od gradova?
b) Postoje li godine u kojima ima jednaka količina padavina u oba grada?
c) U kojem periodu je zabilježen najveći pad padavina tokom jedne godine?
č) Kolika je razlika u padavinama u 2022. godini?



црт. 6

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Cijena pola litra kravljeg i ovčijeg kiselog mlijeka mijenjala se tokom 5 mjeseci u skladu s podacima u tabeli:

	januar	februar	mart	april	maj
kravlje kiselo mlijeko	45	47	44	40	40
ovčije kiselo mlijeko	57	60	55	51	51

Prikaži ove podatke u jednom linijskom dijagramu. Pazi, postoje dva različita tipa kiselog mlijeka.

2. Tabela prikazuje interesovanje za vannastavne aktivnosti kod 100 učenika. Nacrtaj sektorski dijagram kako bi prikazao/la te podatke.

aktivnost	Sport	Orkestar	Nauka	društveno-humanitarna
frekvencija	39	18	20	23

3. U tabeli i sektorskom dijagramu na crtežu 7 dati su rezultati istraživanja u vezi s omiljenim ukusom kolača kod 30 djece i 36 odraslih.

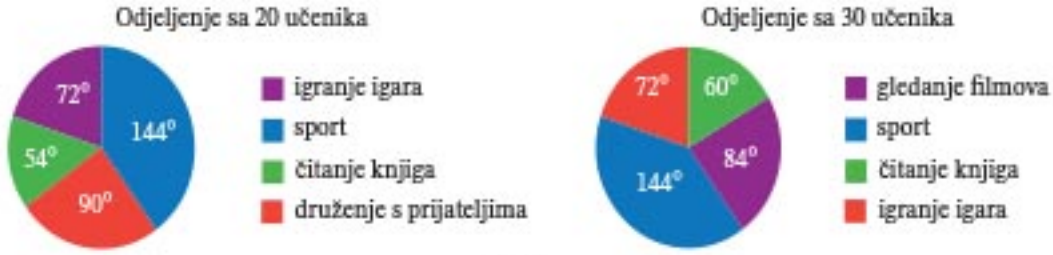
omiljeni ukus kod djece	frekvencija
voćni	5
čokolada	11
vanilija	8
lješnjak	6



Crtež 7

a) Nacrtaj sektorski dijagram za podatke dobijene za djecu.
b) Koliko odraslih voli čokoladne kolače?
c) Uporedi vrijednosti kod djece i kod odraslih. Da li postoje sektori u oba kružna dijagrama koji imaju jednake centralne uglove? Koliki broj jedinica oni prikazuju?

4. Učenici iz 2 odjeljenja bili su upitani kako provode slobodno vrijeme. Prvo odjeljenje ima 20, a drugo 30 učenika. Odgovori su dati pomoću sektorskih dijagrama na crtežu 8:



Crtež 8

a) Pronađi koja dva sektora imaju jednak ugao i objasni kako je to moguće, iako je ukupan broj učenika u oba odjeljenja različit.

b) U kojem odjeljenju ima više učenika koji igraju igre? Da li to znači i veći procenat?

c) Izračunaj procenat učenika koji se bave sportom u oba dijagrama. Šta primjećuješ?

č) Napravi sektorski dijagram računajući da si anketirao ukupno 40 učenika za isto pitanje, gdje će sektor za sport biti predstavljen istim uglom kao u oba data sektorska dijagrama (144°). Uglove za sektorske dijagrame koji odgovaraju drugim aktivnostima predloži po svom izboru.

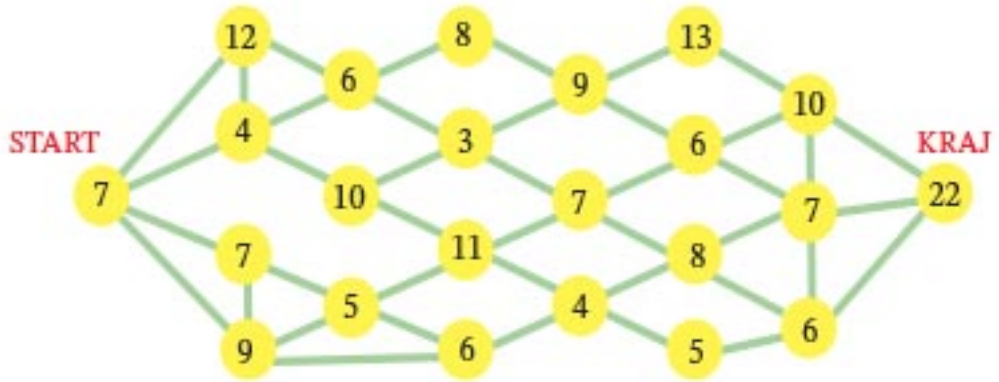
5. Potrebno je da se pomoću linijskog dijagrama prikažu podaci o najvišoj i najnižoj prosječnoj mjesečnoj temperaturi u jednom gradu, dati u tabeli.

mjesec	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
najviša prosječna temperatura (°C)	+4	+16	+16	+25	+27	+30	+35	+36	+25	+20	+17	+10
najniža prosječna temperatura (°C)	−25	−20	−2	+3	+5	+13	+18	+11	+12	+5	−4	−15

Istraživanje

1. Na internetu ili u pisanim publikacijama traži prikaze podataka s nekim od proučavanih dijagrama i zabilježi na koja pitanja je odgovoreno konkretnim statističkim istraživanjima. Zatim pokušaj sastaviti barem još dva pitanja u vezi s njima.
2. Igraj igru sa slike prema sljedećim pravilima: kreći se linijama počevši od **starta** ka **kraju**. Aritmetička sredina brojeva na kojima si stao ne smije biti manja od 5 i veća od 10. Ne možeš stati više puta na isto polje.

Izazov za odjeljenje: igru možete igrati na nivou odjeljenja ili u parovima, pobjednik je onaj koji će prvi stići do **kraja**.



5. STABLO – LIST DIJAGRAM

Aktivnost

Odredi medijanu za sljedeću grupu podataka:

a) 3, 5, 6, 6, 8, 10, 13, 14, 14, 14

b) 4, 1, 3, 6, 6, 1, 1, 2, 7

Prikupljene podatke s numeričkim karakteristikama prikupljene tokom istraživanja možemo organizovati sređivanjem prema veličini.

Tada je najprikladnije da koristimo dijagram koji se naziva **dijagram stablo-list** (crtež 1)

Pritom se „stablo" nalazi lijevo od vertikalne linije, a „listovi" desno od nje uvijek su prikazani sa samo jednim brojem.

Listovi su organizovani prema veličini, zapisujemo ih u redove i pazimo da budu napisani jedan ispod drugog (kao kod vertikalnih linija).

Obavezno za svaki stablo-list dijagram jeste dodjeljivanje **ključa** prema kojem će se dijagram čitati.

stablo	list				
2	0	0	1	2	7
3	1	1	2		
4	2	3	5	6	
5	1	3	4	4	6

Ključ: 5/1 predstavlja 51

Primjer 1

Dat je skup vrijednosti koje predstavljaju vrijeme čekanja na kasi u supermarketu izraženo u minutama.

17, 23, 20, 19, 25, 30, 32, 25, 12, 10, 23, 15, 11.

a) Upotrijebi dijagram stablo-list da bi prikazao/la rezultate.

b) Odredi rang vremena čekanja.

c) Koliki procenat kupaca je čekao 20 minuta ili više?

č) Pronađi medijanu za ovu grupu podataka.

a) Prvi korak: Na stablu ćemo predstaviti desetice, a listovi će biti cifre jedinica svake vrijednosti.

1	7	9	2	0	5	1
2	3	0	5	5	3	
3	0	2				

Drugi korak: Sređujemo listove prema veličini.

1	0	1	2	5	7	9
2	0	3	3	5	5	
3	0	2				

Ključ: 3|0 predstavlja 30 minuta

b) Rang = najviša vrijednost − najniža vrijednost = 32 − 10 = 22.

c) Brojimo listove iz drugog i trećeg reda i izračunavamo koliki procenat oni predstavljaju.
7 kupaca je čekalo najmanje 20 minuta, a dato je ukupno 13 vrijednosti,
pa dobijamo da je $\frac{7}{13} \approx 0,54 = 54\%$ kupaca koji su čekali 20 minuta i više.

č) Pošto su podaci već sređeni u stablo – list dijagramu, eliminisanjem dvije vrijednosti (jedne s početka i jedne s kraja stablo – list dijagrama) dolazimo do vrijednosti koja se nalazi u sredini niza, odnosno 20.

1	~~0~~	~~1~~	~~2~~	~~5~~	~~7~~	~~9~~
2	0	~~3~~	~~3~~	~~5~~	~~5~~	
3	~~0~~	~~2~~				

Skeniraj kod i pregledaj dijagrame.

Zadatak 1

Jovan je prikupio podatke o dužinama gusjenica koje je pronašao na ekskurziji.
Dužine su date na dijagramu stablo – list.

a) Kolika je dužina najmanje, a kolika najveće gusjenice?

b) Koliko je gusjenica Jovan pronašao?

c) Koliko gusjenica je dugačko najviše 3 cm?

č) Odredi rang dužinama.

ć) Odredi medijanu dužinama.

1	3	5	7	7				
2	0	6	8	8	8	9		
3	1	5	5	5	5	6	8	9
4	1	5						
5	2							

Ključ: 5|2 predstavlja 5,2 cm

Zadatak 2

Nastavnik engleskog jezika zatražio je od učenika da se predstave u nekoliko riječi.
Dat je broj upotrijebljenih riječi u predstavljanju 40 učenika.

72	81	78	82	78	89	82	77
85	76	75	81	74	87	84	77
80	83	79	82	75	74	74	71
75	79	72	76	71	75	82	78
76	76	81	77	72	84	87	83

a) Upotrijebi stablo – list dijagram da bi predstavio/la podatke.
b) Napravi tabelu frekvencija s grupisanim podacima.
c) Koliko je učesnika upotrijebilo više od 84 riječi?
č) Koliki je procenat učesnika koji su koristili manje od 75 riječi?
ć) Pronađi rang podataka.
d) Odredi medijanu grupi podataka.

Zadatak 3

Učenici jednog odjeljenja izmjerili su koliko minuta dnevno potroše na vježbanje (trčanje, brzo hodanje ili vožnju bicikla) tokom jednog dana. Dobijeni podaci u minutama su:

32, 45, 28, 41, 39, 47, 52, 36, 44, 33, 38, 50.

a) Napravi stablo-list dijagram za podatke.
b) Koje vrijednosti su najčešće?
c) Odredi medijanu.
č) Koliko je učenika vježbalo duže od 40 minuta?

Zadatak 4

U okviru časa iz biologije učenici jednog odjeljenja mjerili su puls u mirovanju. Dobijene vrijednosti su:

72, 78, 65, 81, 74, 69, 77, 83, 71, 75, 68, 79.

a) Predstavi podatke stablo – list dijagramom kako bi bolje uočio/la kako fiziološki parametri variraju među učenicima.
b) Prema dijagramu, koji je najčešći puls?
c) Kolika je medijana?
č) Koliko učenika ima puls 75 ili više?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Iz datog stablo-list dijagrama odredi:
   a) najnižu vrijednost,
   b) najveću vrijednost,
   c) koliko podataka ima vrijednost veću od 90,
   č) koliko podataka ima vrijednost od najmanje 100,
   ć) procenat podataka manji od 75.

7	3	4	6	7	8	9	9						
8	0	0	1	1	2	3	3	5	5	6	7	8	8
9	1	1	2	4	4	5	8	9					
10	2	3	7										
11													
12	2												

Ključ: 9|1 predstavlja 91

2. Aneta broji riječi u svakoj od 30 rečenica u dnevnim novinama. Njeni rezultati prikazani su stablo-list dijagramom.

0	8	8	9					
1	1	2	3	4	4	8	9	
2	0	3	5	5	7	7	8	
3	2	2	3	3	6	6	8	8
4	1	2	3	3	5			

Ključ: 4|1 predstavlja 41 riječ

a) Koliko rečenica ima po 36 riječi?

b) Odredi rang.

c) Nađi medijanu.

č) Izračunaj prosječan broj riječi u rečenicama koje analizira Aneta.

3. Navedena je masa, u kilogramima, za 15 paketa.

1,1	1,7	2,0	1,0	1,1	0,5	3,3	2,0
1,5	2,6	3,5	2,1	0,7	1,2	0,6	

a) Nacrtaj stablo-list dijagram da bi prikazao/la ove informacije.

b) Koliko paketa ima masu manju od 2 kilograma?

c) Kakav je rang masa?

č) Odredi medijanu masi pakovanja.

4. Jana mjeri visinu biljaka (u milimetrima) u botaničkoj bašti. Ovo su dobijeni rezultati:

178	189	147	147	166
167	153	171	164	158
189	166	165	155	152
147	158	148	151	172

a) Prikaži rezultate stablo-list dijagramom.

b) Koji je rang visina?

c) Koliko je biljaka viših od 165 mm?

č) Nađi medijanu visina.

ć) Odredi modu visina.

5. Učenici osmog odjeljenja izvode laboratorijski eksperiment kako bi izmjerili vrijeme pada male metalne lopte s visine od 3 metra.
   Svaki učenik izvrši po jedno mjerenje i dobijeni su sljedeći rezultati (u sekundama):

   0,78; 0,81; 0,74; 0,69; 0,72; 0,85; 0,80; 0,73; 0,77; 0,82; 0,76; 0,79; 0,75; 0,83; 0,71; 0,88; 0,84; 0,70; 0,74; 0,78.

   a) Napravi stablo – list dijagram za podatke.
   b) Koji je rang vremena?
   c) Koliko je mjerenja ispod 0,75 s?
   č) Kolika je moda, ako postoji?

6. Jedan geografski klub prikuplja podatke o dnevnim minimalnim temperaturama u dva različita područja u RS Makedoniji u istom periodu januara.
   Oni su sortirali podatke i za Oblast A već napravili stablo – list dijagram:

   Oblast A: Stablo – list dijagram (minimalne temperature u °C)

−5	9			
−4	8	7		
−3	9	5	2	
−2	8	6	6	5
−1	9	4		

   Ključ -3|5 predstavlja -3,5 °C

   Podaci za oblast B (u °C): −1,0; −0,5; −2,0; −1,5; −3,0; −2,5; −1,0; −0,5; −0,5; −1,0; −4,2; −2,0.

   a) Napravi stablo-list dijagram za oblast B.
   b) Uporedi dva dijagrama. Šta se može zaključiti o razlici u klimi između obje oblasti?
   c) Kada bi trebao/la preporučiti oblasti u kojima bi bolje funkcionisala voćarska kultura osjetljiva na led (na primjer breskva ili kajsija), u kojem kraju bi postavio/la plantažu? Obrazloži svoju odluku na osnovu dijagrama.
   č) Predloži dva istraživačka pitanja koja bi mogla objasniti razlike u minimalnim temperaturama između oblasti A i B.

Istraživanje

Prikupi podatke o visini učenika u tvom odjeljenju, broju bodova na posljednjem testu, vremenu trčanja u minutama na 400 m i slično za neke školske aktivnosti. Predstavi podatke stablo – list dijagramom i odredi:

a) rang, b) medijanu, c) modu, č) aritmetičku sredinu.

Zapiši prednosti korištenja stablo-list dijagrama umjesto tabele.

6. STATISTIČKI PRORAČUNI ZA GRUPISANE PODATKE

Aktivnost

Temperature mjerene svakog dana u podne tokom dvije sedmice u januaru su sljedeće:
−2, −5, −6, −4, −1, 2, 4, 5, 5, 3, −2, −3, 0, 1, 2.

Nađi:
a) modu,
b) medijanu,
c) aritmetičku sredinu,
č) rang podataka.

Skeniraj kod i pregledaj statistike.

Ako su dati grupisani podaci, ne možemo odrediti modu, medijanu i aritmetičku sredinu. Umjesto njih, možemo naći modalnu klasu, klasu koja sadrži medijanu i hajde da napravimo procjenu prosjeka.

Primjer 1

Poeni s pismenog rada iz matematike koje su učenici jednog odjeljenja osvojili prikazani su sljedećom tabelom frekvencija s grupisanim podacima:

poeni	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100
broj učenika	3	8	13	10	8

a) Odredi klasu koja sadrži medijanu.
b) Odredi modalnu klasu.
c) Koliki je prosječan broj bodova dobijenih na pismenom radu?

a) Sabiramo frekvencije kako bismo dobili ukupan broj učenika $3 + 8 + 13 + 10 + 8 = 42$.
Medijana treba da bude na sredini između 21. i 22. vrijednosti.
Prvih 11 vrijednosti je od 0 do 49 poena, a narednih 13 vrijednosti pripada intervalu 50 do 72 poena.
Prema tome, 21. i 22. vrijednost nalaze se u intervalu 50–72, odnosno klasa koja sadrži medijanu je 50–72.
b) Modalna klasa je klasa s najvećom frekvencijom, odnosno 50–72.
c) Klasa 0–26 sadrži 3 vrijednosti od 0 do 26, njena srednja vrijednost je 13, klasa 27–49 ima 8 vrijednosti, njena srednja vrijednost je $(27 + 49) : 2 = 38$, itd.

poeni	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	ukupno
srednja vrijednost klase, m	13	38	61	80	94	
broj učenika, frekvencija f	3	8	13	10	8	42
$m \cdot f$	39	304	793	800	752	2688

Procjena za ukupan broj bodova je 2688, a broj učenika koji su postigli ove poene je 42.
Procjena za prosječan broj poena po učeniku je 2688 : 42 = 64.
U stvarnosti se u statističkim istraživanjima najčešće koriste softverska rješenja za obradu podataka.
U datom primjeru možeš pokušati koristiti funkcije za automatsko izračunavanje nekih od vrijednosti u tabeli, kao što je zbir (ukupan broj učenika, slika 1) prilikom procjene prosjeka.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Poeni	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	ukupno
3		srednja vrijednost klase, m	13	38	61	80	94	
4		broj učenika, frekvencija, f	3	8	13	10	8	=SUM(C4:G4)
5								

slika 1

Primjer 2

Lejla je sakupila bodove koje je svaki njen drug iz razreda osvojio/la u jednoj igri.
Podaci u bodovima su: 7, 9, 5, 6, 8, 7, 10, 6, 8, 9, 7, 5, 6.

a) Unesi podatke u program za tabelarne proračune.
b) Napravi stablo – list dijagram koristeći funkciju za sortiranje.
c) Automatski izračunaj: ukupan broj učenika, prosječan broj bodova, najveći i najniži rezultat.

a) Na slici 2 prikazan je primjer podataka unesenih u softver za tabelarne proračune.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Učenik	Bodovi			
3		1	7			
4		2	9			
5		3	5			
6		4	6			
7		5	8			
8		6	7			
9		7	10			
10		8	6			
11		9	8			
12		10	9			
13		11	7			
14		12	5			
15		13	6			

slika 2

b)

5	5 5
6	6 6 6
7	7 7 7
8	8 8
9	9 9
10	10

Ključ: 5|5 učenik ima 5 poena.

c) Funkcije za automatsku obradu:

- Ukupno učenika: =COUNTA(C3:C15) → 13
- Prosjek: =AVERAGE(C3:C15) → 7,23
- Najviši rezultat: =MAX(C3:C15) → 10
- Najniži rezultat: =MIN(C3:C15) → 5

Primjer 3

Pronađi rang visine učenika iz jednog odjeljenja, datih u sljedećoj tabeli:

Visina (cm)	150-154	155-159	160-164	165-169	170-174	175-179
broj učenika	5	18	42	14	13	8

Ako su podaci već grupisani u intervale s tabelama frekvencija, tada rang predstavlja razliku gornje granice posljednjeg intervala s donjom granicom prvog intervala.
Rang je 179 - 150 = 29.

Zadatak 1

Tjelesne mase 100 ljudi date su u sljedećoj tabeli.

tjelesna masa (kč)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70 -79	80- 89	90 - 99	Ukupno
frekvencija	6	8	22	31	12	11	5	5	100

a) Nađi modalnu klasu ovih masa.
Šta pokazuje modalna klasa?
b) Nađi klasu koja sadrži medijanu.
c) Nađi rang.
č) Prvo napravi procjenu prosječne mase.
Objasni svoju strategiju procjenjivanja.
ć) Provjeri svoju procjenu izračunavanjem.

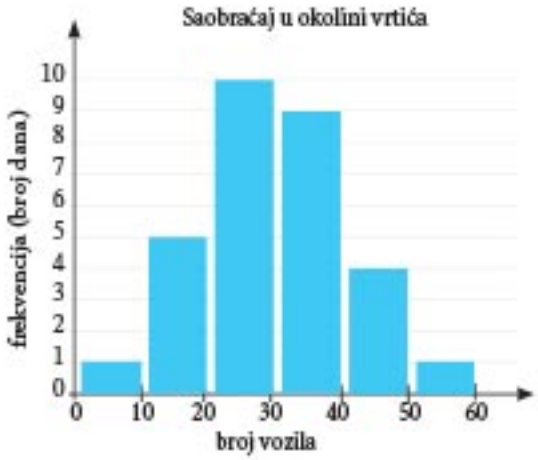
Zadatak 2

Najveća masa dobijena tokom 50 mjerenja iznosi 8,56 kg. Ako je rang mjerenja 1,23 kg, kolika je onda najmanja izmjerena masa?

Zadatak 3

Rukovodstvo vrtića bilo je zabrinuto za bezbjednost u saobraćaju u neposrednoj blizini vrtića. Napravili su istraživanje koliko vozila prođe ispred vrtića od 7:00 do 8:00 sati radnim danima u trajanju od 6 sedmica.
Podaci su dati stubastim dijagramom (crtež 1).

a) Koliko vozila se najčešće nalazi u blizini vrtića? Šta treba da odrediš kako bi odgovorio/la na ovo pitanje?
b) S dijagrama odredi klasu koja sadrži medijanu i napravi procjenu prosječnog broja vozila.
c) Bezbjednost je narušena ako je broj vozila veći od 35. Da li je okolina vrtića bezbjedna? Koje informacije koristiš kako bi odgovorio/la na ovo pitanje?

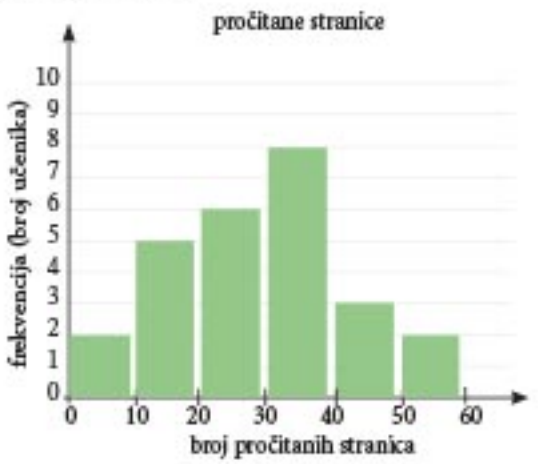


Crtež 1

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Nastavnica makedonskog jezika pitala je svoje učenike koliko su stranica zadate lektire do sada pročitali. Rezultati su dati na stubastom dijagramu (crtež 2).

   a) Koja je modalna klasa za podatke koje je nastavnica prikupila?
   b) Koliko je učenika pročitalo najmanje 40 stranica?
   c) Učenici su za domaći zadatak trebali pročitati najmanje prvih 30 stranica. Koliko učenika nije završilo svoj domaći zadatak?
   č) Pronađi rang podataka.



Crtež 2

2. Mini-market bilježi koliko kupaca ima svakog dana tokom 50 dana.
   Rezultati su sljedeći:

81	82	75	83	104	92	112	124	110	92
111	105	78	87	99	86	129	115	121	76
109	75	104	96	74	104	98	114	106	109
101	110	92	86	122	118	115	117	84	71
73	116	119	122	94	81	107	109	115	127

a) Napravi tabelu frekvencija za grupisane podatke koristeći klase 70–79, 80–89, ..., 120–129. Ukoliko imaš mogućnosti, napravi tabelu pomoću softvera za tabelarne proračune.
b) Nađi modalnu klasu.
c) Nađi klasu koja sadrži medijanu.
č) Izrazi u procentima koliko dana je market imao najmanje 100 kupaca.
ć) Zaposleni u marketu misle da je dan uspješan ako imaju najmanje 110 kupaca. Na osnovu dobijenih rezultata, da li market treba napraviti promjene radi poboljšanja svog poslovanja?

3. Istraži koliko sati dnevno tvoji vršnjaci koriste internet: za učenje, igre, društvene mreže ili gledanje videozapisa. Prikupi podatke od najmanje 30 vršnjaka i grupiši ih u tabelu frekvencija koristeći odgovarajući softver za tabelarne proračune. Zatim pokušaj koristiti jednu od funkcija softvera za tabelarne proračune kako bi nacrtao/la dijagram (izaberi tip dijagrama za koji misliš da pruža najbolji prikaz).
a) Nađi modalnu klasu.
b) Nađi klasu koja sadrži medijanu.
c) Napravi procjenu prosjeka.
Napiši kratak zaključak (3 do 4 rečenice) u kojem ćeš:
- analizirati kako učenici najčešće koriste internet (na osnovu modalne klase)
- procijeniti „tipičan" način korištenja (na osnovu klase koja sadrži medijanu)
- prokomentarisati da li je korištenje interneta umjereno ili prekomjerno (na osnovu procijenjenog prosjeka)

Napiši preporuke o tome kako bi učenici mogli efikasnije organizovati svoje vrijeme na internetu. Možeš uključiti i kratak prijedlog plana.

4. Visine 50 učenika (u cm) iznose:

145	154	161	137	137	130	128	154	139	155
168	138	161	152	160	131	156	130	141	146
162	160	163	139	148	157	149	146	146	142
146	137	127	130	128	158	139	144	140	143
130	134	125	176	128	132	138	137	143	135

a) Sredi podatke u tabelu frekvencija s grupisanim podacima. Za dužinu grupnog intervala odluči sam/a.
b) Nađi modalnu klasu.
c) Nađi klasu koja sadrži medijanu.
č) Nađi rang.

Istraživanje

1. Istraži na internetu koji su najčešće korišteni softveri i napravi T-tabelu za dva od njih.
2. Razmisli i odgovori zašto je ponekad prikladno koristiti aritmetičku sredinu, a ponekad modu ili medijanu za izvođenje zaključaka o nekoj populaciji? Kako to zavisi od ranga? Predloži primjere gdje opštu sliku daje medijana, moda ili aritmetička sredina.

7. ELEMENTARNI DOGAĐAJ. SUPROTAN DOGAĐAJ. VJEROVATNOĆA

Elementarni događaj

Aktivnost

1. Navedi sve moguće ishode eksperimenta „bacanje novčića samo jednom".
2. Za eksperiment „bacanje kockice za igru", odredi koji je od sljedećih događaja siguran, a koji nemoguć:

   F: Na gornjoj strani kockice pojavilo se od 1 do 6 tačaka,
   G: Na gornjoj strani kockice pojavilo se 7 tačaka?

Podsjeti se da je **eksperiment** aktivnost koja se može posmatrati. Svaki eksperiment može se ponoviti pod istim uslovima, ima više mogućih ishoda i ne znamo unaprijed koji će se dogoditi. Na primjer, eksperiment može uključivati bacanje novčića ili kockice za igru, istraživanje da li biljke rastu brže na svjetlu ili u mraku, ili čak ozbiljne laboratorijske testove.

Različiti rezultati (ishodi) eksperimenta nazivaju se događaji. U eksperimentu izvlačenja karte iz špila karata za igranje, događaji su ishodi: izvučena je osmica tref, izvučena je desetka, izvučena je karta crvene boje i slično.

Primjer 1

Kod eksperimenta „bacanje kockice", razmotri sljedeće događaje:



A: Na gornjoj strani kockice pojavio se paran broj tačaka,
B: Na gornjoj strani kockice pojavio se paran broj tačaka djeljiv sa 3,
E_1: Na gornjoj strani kockice pojavila se 1 tačka,
E_2: Na gornjoj strani kockice pojavile su se 2 tačke,
E_3: Na gornjoj strani kockice pojavile su se 3 tačke,
E_4: Na gornjoj strani kockice pojavile su se 4 tačke,
E_5: Na gornjoj strani kockice pojavilo se 5 tačaka,
E_6: Na gornjoj strani kockice pojavilo se 6 tačaka,

Koji od ovih događaja mogu da se „razlože" na druge događaje, a koji ne?

Događaj A pojavljuje se ako se dogodi jedan od sljedećih događaja:

E_2: Na gornjoj strani kockice pojavile su se 2 tačke,

E_4: Na gornjoj strani kockice pojavile su se 4 tačke,

E_6: Na gornjoj strani kockice pojavilo se 6 tačaka,

što znači da ovaj događaj može biti „razložen“ na druge događaje koji se dalje ne mogu razložiti.

Događaj V pojavljuje se ako se dogodi jedan od događaja:

E_3: Na gornjoj strani kockice pojavile su se 3 tačke,

E_6: Na gornjoj strani kockice pojavilo se 6 tačaka,

što znači da se ovaj događaj može razložiti i na druge događaje koji se ne mogu dalje razložiti.

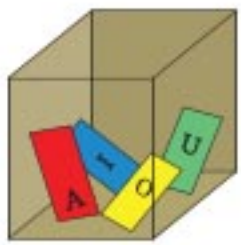
Za događaje koji se ne mogu dalje razložiti na druge događaje kažemo da su elementarni događaji. U ovom primjeru, to su događaji E_1, E_2,E_3, E_4, E_5, E_6.

Elementarni događaj u odnosu na dati eksperiment je svaki događaj koji se ne može razložiti na druge događaje.

Pri jednom izvođenju eksperimenta „bacanja kockice“, pojavljuje se jedan i samo jedan elementarni događaj. To znači da se pri pojavljivanju jednog od elementarnih događaja ne može dogoditi nijedan od ostalih elementarnih događaja u vezi s tim eksperimentom.

Zadatak 1

Zapiši sve elementarne događaje u vezi s eksperimentom:
a) bacanje novčića samo jednom,
b) izvlačenje kartice iz kutije na slici 1a,
c) okretanje vrtuljka sa slike 1b.



slika 1a


slika 1b

Primjer 2

Zapiši sve elementarne događaje vezane za eksperiment „bacanje dva novčića samo jednom“.

Označimo elementarne događaje pri bacanju novčića:

elementarnim događajem G „glava se pojavila na gornjoj strani novčića“, elementarnim događajem P „na gornjoj strani novčića pojavilo se pismo“.

Pošto se eksperiment sastoji od bacanja dva novčića zajedno, radi veće preglednosti, elementarne događaje možemo prikazati u tabeli:

		Para 1	
		P	G
Para 2	P	P P	G P
	G	P G	G G

Znači, svi elementarni događaji u vezi s eksperimentom „bacanja dva novčića“ mogu se napisati kao: pismo pismo = P P; glava pismo = G P; pismo glava = P G; glava glava = G G.

Primjer 3

Zapiši sve elementarne događaje pri eksperimentu „okretanje oba vrtuljka samo jednom“ data na slici 2.



vrtuljak 1 vrtuljak 2

slika 2

Da bismo ispisali sve elementarne događaje u eksperimentu okretanja dva vrtuljka, prvo se dogovaramo da ćemo elementarne događaje za svaki od vrtuljaka označiti na sljedeći način:

za vrtuljak sa slovima:

A: strelica se zaustavila na polju sa slovom A,
B: strelica se zaustavila na polju sa slovom B,
C: strelica se zaustavila na polju sa slovom C.

za vrtuljak s brojevima:

1: strelica se zaustavila na polju s brojem 1,
2: strelica se zaustavila na polju s brojem 2,
3: strelica se zaustavila na polju s brojem 3,
4: strelica se zaustavila na polju s brojem 4.

Svi elementarni događaji vezani za eksperiment „okretanje dva vrtuljka“ dati su u tabeli:

		vrtuljak s brojevima			
		1	2	3	4
vrtuljak sa slovima	A	A 1	A 2	A 3	A 4
	B	B 1	B 2	B 3	B 4
	C	C 1	C 2	C 3	C 4

Na primjer, događaj B 3 označava da se strelica na jednom vrtuljku zaustavila na slovu B, a na drugom vrtuljku na broju 3.

Skeniraj kod i ispitaj elementarne događaje eksperimenta.

Zadatak 2

Sastavi tabelu elementarnih događaja povezanih s eksperimentom:

a) bacanje dvije kockice,



slika 3

b) bacanje dva tetraedra sa stranama označenim brojevima
1, 2, 3 i 4 (slika 3).
Uputstvo: Pri bacanju tetraedra ishod se određuje prema broju upisanom na strani na kojoj tetraedar leži na površini na koju je bačen.

c) bacanje kockice za igranje i tetraedra sa stranama koje su označene brojevima 1, 2, 3 i 4.

Suprotan događaj. Vjerovatnoća

Aktivnost

U eksperimentu bacanja novčića, koji je suprotan događaj događaju A: palo je pismo?

Suprotan događaj događaju A jeste događaj koji se pojavljuje onda i samo onda kada se događaj A ne ostvaruje.

Suprotan događaj događaju A označen je sa $\overline{A}$.

Primjer 4

U eksperimentu „bacanje kockice za igranje" odredi:
a) Koji je suprotan događaj događaju A: pao je broj tačaka manji ili jednak 3?
b) Da li se uvijek dešava tačno jedan od događaja A ili $\overline{A}$?

a) U vezi s eksperimentom „bacanje kockice za igranje", dešava se jedan od elementarnih događaja:

E_1: na gornjoj strani kocke pojavila se 1 tačka,
E_2: na gornjoj strani kocke pojavile su se 2 tačke,
E_3: na gornjoj strani kocke pojavile su se 3 tačke,
E_4: na gornjoj strani kocke pojavile su se 4 tačke,
E_5: na gornjoj strani kocke pojavilo se 5 tačaka,
E_6: na gornjoj strani kocke pojavilo se 6 tačaka.

Događaj A: pao je broj tačaka manji ili jednak 3, pojavljuje se ako se pojavi jedan od elementarnih događaja: E_1, E_2 ili E_3.
Suprotan događaj $\overline{A}$ pojavljuje se ako se pojavi jedan od elementarnih događaja:

E_4, E_5 ili E_6.

Prema tome, suprotan događaj događaju A jeste događaj $\overline{A}$: pao je broj tačaka veći od 3.

b) Pri svakom bacanju kockice pojavljuje se tačno jedan od elementarnih događaja E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ili E_6, što znači da se uvijek pojavljuje tačno jedan od događaja A ili $\overline{A}$.

Zadatak 3

Koji je događaj suprotan datom događaju u svakom od eksperimenata:

a) eksperiment: bacanje kockice za igranje, događaj A: pojavljuje se broj tačaka veći od 4,

b) eksperiment: izvlačenje kuglice iz kutije koja sadrži crne, bijele i crvene kuglice, događaj B: izvlači se bijela kuglica,

c) eksperiment: istovremeno bacanje dva novčića, događaj S: na gornjoj strani oba novčića pojavljuje se pismo,

č) eksperiment: bacanje kockice i novčića, događaj D: na kockici se pojavljuje broj tačaka djeljiv sa 3, a na gornjoj strani novčića pojavljuje se glava.

Skeniraj kod i ispitaj vjerovatnoće.

Aktivnost

Za eksperiment „baci novčić samo jednom", izračunaj vjerovatnoću događaja A: na gornjoj strani novčića pojavljuje se pismo.

Svakako si izračunao/la da je vjerovatnoća događaja A

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj svih ishoda}} = \frac{1}{2}$$

Primjer 5

Nebojša baca kockicu za igranje.

a) Kolika je vjerovatnoća događaja A: da se pojavi 6 tačaka na gornjoj strani kockice?

b) Kolika je vjerovatnoća pojavljivanja suprotnog događaja događaju A?

a) Za vjerovatnoću događaja A imamo $P(A) = \frac{1}{6}$ (od svih 6 strana kockice, samo jedna ima 6 tačaka).

b) Suprotan događaju A jeste događaj $\overline{A}$: broj 6 nije pao. Događaj $\overline{A}$ dešava se uvijek kada se 1, 2, 3, 4 ili 5 tačaka pojavi na gornjoj strani kockice, tako da je vjerovatnoća

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - P(A).$$

Primjer 6

Matea je bacila kockicu 30 puta i posmatrala koliko puta će se šest tačaka pojaviti na gornjoj strani kockice. Pritom je izbrojala da se 7 puta na gornjoj strani kocke pojavilo šest tačaka. Kolika je eksperimentalna vjerovatnoća događaja „pojavilo se 6 tačaka" i kolika je vjerovatnoća suprotnog događaja (nije se pojavilo 6 tačaka na gornjoj strani kockice)?

Eksperimentalna vjerovatnoća za događaj „na gornjoj strani kocke pojavilo se 6 tačaka“ prilikom 30 bacanja je $\frac{7}{30}$, dok se u tih 30 bacanja u Mateinom eksperimentu 23 puta nije pojavilo 6 tačaka na gornjoj strani kocke. Tako je vjerovatnoća suprotnog događaja $\frac{23}{30}=1-\frac{7}{30}$.

Ako je vjerovatnoća nekog događaja P, onda je vjerovatnoća njegovog suprotnog događaja $1-P$.

Primjer 7

Iskra u svojoj tašni ima dvije bioskopske i tri pozorišne karte. Ona izvlači jednu kartu iz tašne bez gledanja.

a) Zapiši suprotne događaje povezane s izvlačenjem karata iz Iskrine tašne.

b) Kolika je vjerovatnoća da će izvući pozorišnu kartu?

c) Kolika je vjerovatnoća da će izvući bioskopsku kartu?

č) Šta je vjerovatnije da će biti izvučeno, bioskopska ili pozorišna karta?

ć) Kolika je vjerovatnoća da će izvući sportsku kartu iz svoje tašne?

d) Koji je suprotan događaj događaju C: Iskra izvlači sportsku kartu iz svoje tašne?

a) Mogući događaji su:

A: Iskra izvlači kartu za pozorište, B: Iskra izvlači kartu za bioskop.

Njihovi suprotni događaji su:

$\overline{A}$: Iskra izvlači kartu za bioskop, $\overline{B}$: Iskra izvlači kartu za pozorište.

b) A: Iskra izvlači kartu za pozorište, pa $P(A)=\frac{3}{5}$.

c) B: Iskra izvlači kartu za bioskop, pa $P(B)=\frac{2}{5}$.

č) Veća je vjerovatnoća da će biti izvučena karta za pozorište, jer je $P(A)=\frac{3}{5}>\frac{2}{5}=P(B)$.

ć) Događaj C: izvlačenje karte za sportsku utakmicu je nemoguć događaj, pa je $P(C)=0$.

d): $\overline{C}$ izvlači kartu koja nije za sportsku utakmicu iz tašne, odnosno izvlači kartu za pozorište ili bioskop, pa je $P(\overline{C})=1$.

Zadatak 4

Svako slovo abecede napisano je na kartici, a kartice su stavljene u kutiju. Jedna kartica izvlači se iz kutije bez gledanja. Kolika je vjerovatnoća izbora:

a) kartice sa slovom H,

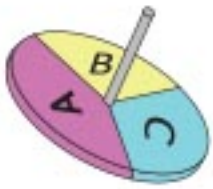
b) kartice s jednim od slova iz riječi MATEMATIKA,

c) kartice sa samoglasnikom.

Koji su suprotni događaji događajima pod a), b) i c)? Kolika je njihova vjerovatnoća?

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. Zapiši sve elementarne događaje povezane s eksperimentom:
   a) okretanje vrtuljka s tri dijela na kojima su napisana slova A, B, C (slika 4),
   b) izvlačenje jedne kartice od pet kartica na kojima su napisani brojevi od 1 do 5 (slika 5).
   c) izvlačenje jedne kartice od kartica na kojima su napisani svi sadržaoci broja 5 manji od 30.



slika 4



slika 5

2. Na slici 6 prikazane su kockice i vrtuljak s označenim slovima na svakom od četiri obojena polja.





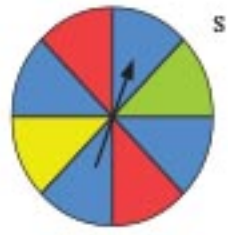
slika 6

   a) Zapiši sve elementarne događaje povezane s eksperimentom okretanja vrtuljka i bacanja kockice.
   b) Kolika je vjerovatnoća da se na vrhu kockice pojavi paran broj tačaka, a na vrtuljku slovo C?

3. Bez gledanja, izvuci jednu bombonu iz tegle s bombonama kao na slici 7.
   a) Zapiši eksperiment.
   b) Zapiši sve elementarne događaje.
   c) Kolika je vjerovatnoća izvlačenja žute bombone?
   č) Da li je događaj „izvučena je plava ili zelena bombona“ suprotan događaj događaju „izvučena je žuta bombona“? Objasni svoj odgovor.
   ć) Odredi vjerovatnoću suprotnog događaja događaju „izvučena je žuta bombona“.
   d) Koji je suprotan događaj događaju „izvučena je bombona koja nije crvena“?


slika 7

4. Luan baca strelicu za pikado u metu kao što je prikazano na slici 8.
   a) Zapiši Luanov eksperiment i sve elementarne događaje povezane tim eksperimentom. Izračunaj vjerovatnoću događaja:
      A: pogođeno je plavo polje.
      B: pogođeno je polje koje nije plavo.
      C: pogođeno je crveno polje.
      D: pogođeno je žuto ili zeleno polje.


slika 8

b) Zapiši suprotan događaj svakom od događaja *A*, *B*, *C*, *D*.
Izračunaj njihovu vjerovatnoću.
c) Zapiši suprotan događaj događaju „Luan pogađa crveno polje“, a zatim izračunaj njegovu vjerovatnoću.

Istraživanje

Napravi avion od papira. Predvidi koliko često će pravilno sletjeti, koristeći položaje prikazane na slici za pravilna ili nepravilna slijetanja.

1) pravilno slijetanje



2) nepravilno slijetanje



Baci avion 50 puta i zapiši koliko puta je pravilno sletio. Zatim procijeni šanse da avion pogrešno sleti. Uporedi svoje rezultate s rezultatima svojih drugova iz razreda.

8. DOGAĐAJI KOJI SE MEĐUSOBNO ISKLJUČUJU. ZAVISNI I NEZAVISNI DOGAĐAJI

Događaji koji se međusobno isključuju

Aktivnost 1

Za eksperiment „bacanje kockice za igru“, razmotri događaje:

A: na gornjoj strani kockice pojavio se paran broj tačaka, i
B: na gornjoj strani kockice pojavile su se tri tačke ili pet tačaka.

Da li događaji A i B mogu da se pojave zajedno (istovremeno)?

Za dva ili više događaja koji ne mogu istovremeno da se pojave kažemo da **se međusobno isključuju**.

Primjer 1

Odredi dva primjera međusobno isključivih događaja u eksperimentu izvlačenja karte iz kutije s kartama s brojevima od 1 do 10.

Jedan primjer međusobno isključivih događaja u datom eksperimentu jesu sljedeći događaji:

A: izvučena je karta na kojoj je napisan paran broj i
B: izvučena je karta na kojoj je napisan neparan broj.

Drugi primjer međusobno isključivih događaja u datom eksperimentu je:

C: izvučena je karta na kojoj je napisan broj manji od 5,
D: izvučena je karta na kojoj je napisan broj manji od 7,
E: izvučena je karta na kojoj je napisan broj 6.

Zadatak 1

Što se tiče eksperimenta „bacanje kockice za igru“, izračunaj vjerovatnoću datih događaja i utvrdi da li se međusobno isključuju:

a) A: paran broj tačaka pojavio se na gornjoj strani kockice i
B: 3 tačke pojavile su se na gornjoj strani kockice.

b) C: broj tačaka djeljiv sa 3 pojavio se na gornjoj strani kockice i
D: prost broj tačaka pojavio se na gornjoj strani kockice.

c) E: broj tačaka djeljiv sa 2 pojavio se na gornjoj strani kockice i
F: neparan broj tačaka pojavio se na gornjoj strani kockice.

Primjer 2

Kuglica se izvlači iz kutije koja sadrži 5 crvenih kuglica, 2 žute kuglice i 4 bijele kuglice.

a) Da li se događaji:
A_1: izvlači se crvena kuglica i
A_2:: izvlači se bijela kuglica,
međusobno isključuju?

b) Da li se događaj A: izvlači se crvena ili bijela kuglica, dešava svaki put kada se dogodi jedan od događaja A_1 ili A_2?

c) Izračunaj vjerovatnoću događaja A.

a) Događaji A_1 i A_2 se međusobno isključuju, jer se ne mogu dogoditi istovremeno. U stvari, crvena i bijela kuglica ne mogu biti izvučene u isto vrijeme.

b) Događaj A dešava se kad god se dogodi jedan od događaja A_1 ili A_2.

c) Vjerovatnoća događaja A jeste zbir vjerovatnoća događaja A_1 i A_2:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{5}{11} + \frac{4}{11} = \frac{9}{11}.$$

Primjer 3

Zelena i crvena kockica bacaju se istovremeno, a brojevi tačaka koje se pojavljuju na gornjim stranama sabiraju se. Izračunaj vjerovatnoću događaja A: zbir tačaka koje se pojavljuju na gornjim stranama obje kockice manji je od 4.

Razmotri tabelu koja se odnosi na eksperiment „bacanje crvene i zelene kockice istovremeno".

		zelena					
		1	2	3	4	5	6
crvena	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Događaj A će se desiti kad god se dogodi jedan od sljedećih događaja:

A_1: na zelenoj kockici pojavljuje se 1 tačka, a na crvenoj kockici pojavljuje se 1 tačka,

A_2: na zelenoj kockici pojavljuje se 1 tačka, a na crvenoj kockici pojavljuju se 2 tačke,

A_3: na zelenoj kockici pojavljuju se 2 tačke, a na crvenoj kockici pojavljuje se 1 tačka,

Događaji A_1, A_2 i A_3 međusobno se isključuju. Vjerovatnoća događaja A jeste zbir vjerovatnoća A_1, A_2 i A_3:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Zadatak 2

Iz ladice koja sadrži 4 crvene čarape, 3 plave čarape i 6 bijelih čarapa, jedna čarapa se izvlači bez gledanja.

a) Da li se događaji:

A_1: izvučena je crvena čarapa i

A_2: izvučena je plava čarapa,

međusobno isključuju?

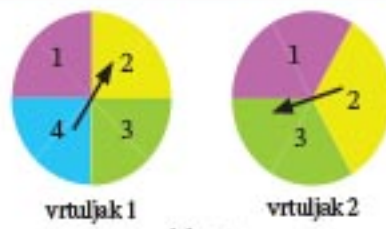
b) Da li se događaj A: izvučena je crvena ili plava čarapa, dešava svaki put kada se dogodi jedan od događaja A_1 ili A_2?

c) Izračunaj vjerovatnoću događaja A_1, A_2 i A.

č) Da li je vjerovatnoća događaja A jednaka zbiru vjerovatnoća događaja A_1 i A_2?

Zadatak 3

Dva vrtuljka okreću se istovremeno kao na slici 1.
Nađi vjerovatnoću događaja
A: „zbir brojeva na kojima se zaustavljaju strelice dva vrtuljka manji je od 5."



slika 1

Nezavisni i zavisni događaji

Aktivnost 2

U vezi s eksperimentom bacanja dva novčića, analiziraj kako pojavljivanje glave na jednom novčiću utiče na pojavljivanje glave ili pisma na drugom novčiću.

Dva događaja su **nezavisna** ako pojavljivanje jednog događaja ne utiče na pojavljivanje drugog događaja.

Primjer 4

Ana peče kolačiće. U isto vrijeme, njen brat Marko igra fudbal u dvorištu.
Objasni zašto su sljedeći događaji nezavisni:

A: Ana uspijeva da ispeče kolačiće, i
B: Marko postiže gol dok igra.

Ova dva događaja su nezavisna, zato što Anin uspjeh u pečenju kolačića ne utiče na to da li će Marko postići gol, niti Markov rezultat u igri utiče na rezultat pečenja Aninih kolačića.

Primjer 5

Toni i Sara igraju igru s dvije kockice. Toni baca crvenu kockicu, a Sara baca plavu kockicu.
Utvrdi da li su sljedeći događaji nezavisni:

A: crvena kockica pokazuje broj tačaka veći od 4 i
B: plava kockica pokazuje paran broj tačaka.

Objasni svoj odgovor.

Ova dva događaja su nezavisna jer ishod crvene kockice ne utiče na ishod plave kockice.

Zadatak 4

Petar kupuje mlijeko u prodavnici. U isto vrijeme, njegova sestra Elena kod kuće gleda film.
Da li su događaji nezavisni:

A: Da Petar kupi mlijeko, i B: Da Elena odgleda film do kraja?

Objasni svoj odgovor.

Zadatak 5

U kutiji ima 5 crvenih i 6 zelenih kuglica. Meriem izvlači jednu kuglicu, vraća je u kutiju, a zatim ponovo izvlači kuglicu.
Napiši dva nezavisna događaja, a zatim objasni zašto su nezavisni.
Dva događaja koja nisu nezavisna nazivaju se **zavisni događaji**.

Prema definiciji nezavisnih događaja, dva događaja su zavisna ako pojavljivanje jednog događaja utiče na pojavljivanje drugog događaja.

Primjer 6

U kuhinji se nalazi posuda s 5 bombona, od kojih su 3 voćne, a 2 čokoladne. Ana vadi jednu bombonu i pojede je, a odmah zatim iz iste posude vadi drugu. Da li su ovi događaji nezavisni:

A: Ana vadi voćnu bombonu pri svom prvom izboru i

B: Ana vadi voćnu bombonu pri svom drugom izboru (nakon što je pojela prvu).

Objasni svoj odgovor.

Ova dva događaja su zavisna, jer događaj A direktno mijenja stanje bombona u posudi i utiče na događaj B.
Ako Ana prvo izvadi voćnu bombonu (ako se događaj A dogodi), ostaje manje voćnih bombona, pa se smanjuje šansa da se drugi put izvadi voćna bombona.
Ako prvo izvadi čokoladnu bombonu (ako se događaj A ne dogodi), broj bombona u posudi ponovo se mijenja, ali na drugačiji način. Ovo također mijenja šansu da se dogodi događaj B.
Zato događaj B zavisi od događaja A, odnosno događaji su zavisni.

Zadatak 6

U kutiji se nalaze 4 crvene i 3 plave olovke. Nastavnica uzima jednu olovku, ne vraća je, a zatim uzima još jednu.
Zapiši dva zavisna događaja, a zatim objasni zašto su zavisni.

Zadatak 7

Kada se dvije kockice bace u isto vrijeme, dešavaju se sljedeći događaji:

A: zbir tačaka koje se pojavljuju na vrhu kockica jeste paran broj, i

B: isti broj tačaka pojavljuje se na vrhu obje kockice.

Objasni kako su događaji A i B povezani.

Primjer 7

U eksperimentu „istovremeno bacanje novčića i kockice“, pronađi vjerovatnoću događaja

A: na novčiću se pojavljuje pismo, a na kockici se pojavljuje 6 tačaka?

Događaji

B: na novčiću se pojavljuje pismo i C: 6 tačaka pojavljuje se na kockici,

nezavisni su događaji, jer pojava jednog ne utiče na pojavu drugog događaja. Događaj A pojavljuje se kada se događaji B i C pojave u isto vrijeme.
Vjerovatnoća događaja A je

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Zadatak 8

Jasmina i Leontin šutiraju loptom na gol s udaljenosti od 3 m. Iz prethodnog iskustva Jasmina pogađa 2 puta od svaka 3 šuta, dok Leontin pogađa 4 puta od 7 šutiranja. Ako oboje šutiraju na gol u isto vrijeme, nađi vjerovatnoću:

a) Da oboje postignu pogodak, b) Da oboje promaše,
c) Da Jasmina postigne gol, a da Leontin promaši.

Primjer 8

U kutiji se nalaze 4 plava i 3 žuta dugmeta istog oblika i veličine (slika 2).
Dva dugmeta nasumično se biraju bez gledanja i bez vraćanja.
Izračunaj vjerovatnoću događaja:

a) A: oba izabrana dugmeta su žuta i,
b) B: prvo izabrano dugme je žuto, a drugo dugme je plavo.



slika 2

a) Događaji

A_1: prvo izabrano dugme je žuto i A_2: drugo izabrano dugme je žuto,

zavisni su događaji jer se dugmad ne vraćaju u kutiju. Pojava događaja A1 mijenja sastav kutije na ukupno 6 dugmadi, od kojih su 2 žuta.
Stoga se vjerovatnoća događaja A_2 također mijenja. Vjerovatnoća događaja A_1 i A_2 je

$$P(A_1)=\frac{3}{7} \text{ i } P(A_2)=\frac{2}{6}.$$

Događaj A dešava se kada se događaji A_1 i A_2 pojave u isto vrijeme. Vjerovatnoća događaja A je

$$P(A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}.$$

b) Događaji

B_1: prvo izabrano dugme je žuto i B_2: drugo izabrano dugme je plavo,

zavisni su događaji, jer pojavljivanje događaja B_1 mijenja sastav kutije na ukupno 6 dugmadi.
Stoga se vjerovatnoća događaja V_2 također mijenja. Vjerovatnoća događaja B_1 i B_2 je

$$P(B_1)=\frac{3}{7} \text{ i } P(B_2)=\frac{4}{6}.$$

Događaj B dešava se kada se događaji B_1 i B_2 dogode u isto vrijeme. Vjerovatnoća događaja B je

$$P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}.$$

Zadatak 9

U kutiji se nalazi 5 zelenih i 3 žute bombone. Dvije gumene bombone biraju se jedna za drugom bez vraćanja. Izračunaj vjerovatnoću događaja:

a) obje izabrane bombone su zelene,
b) prvo se bira zelena bombona, pa žuta bombona,
c) prvo se bira žuta bombona, pa zelena bombona,
č) obje izabrane bombone su žute.

ZADACI ZA VJEŽBANJE

1. a) U eksperimentu bacanja kockice, odredi koji su događaji nezavisni, a koji zavisni:
   A: broj tačaka na gornjoj strani kockice djeljiv je sa 2,
   B: broj tačaka na gornjoj strani kockice djeljiv je sa 3,
   C: broj tačaka na gornjoj strani kockice djeljiv je sa 2 i 3,
   D: broj tačaka na gornjoj strani kockice jeste neparan broj.
   b) Koji se od datih događaja pod a) međusobno isključuju?

2. Marija i Ivan igraju igru s kockicom i novčićem. Marija baca kockicu i zapisuje broj koji padne. Ako Marija baci paran broj tačaka, Ivan baca novčić i vidi da li će pasti glava. Da li su sljedeći događaji zavisni:
   A: Marija baca paran broj, i
   B: Ivan baca novčić i vidi da li će pasti glava?
   Objasni svoj odgovor.

3. Školska ekološka sekcija ima 3 dječaka i 5 djevojčica. Dva člana nasumično su izabrana za jutarnju eko-patrolu. U vezi s događajima A i B, odgovori na sljedeća pitanja:
   Događaj A: Prvi izabrani član je djevojčica
   Događaj B: Drugi izabrani član je djevojčica
   a) Da li ishod drugog izbora zavisi od toga ko je prvi izabran?
   b) Da li su ova dva događaja zavisna ili nezavisna? Objasni.

4. Karte s brojevima od 1 do 20 stavljene su u šešir. Janko izvlači dvije karte jednu za drugom bez vraćanja u šešir.
   Događaj A: Prvi izvučeni broj je paran,
   Događaj B: Drugi izvučeni broj je neparan,
   Događaj C: Prvi izvučeni broj je prost,
   Događaj D: Drugi izvučeni broj je prost.
   a) Da li su događaji A i B zavisni ili nezavisni? Objasni.
   b) Da li su događaji C i D zavisni ili nezavisni? Objasni.

5. U tegli se nalaze 4 ljubičasta žetona, 3 plava žetona i 1 zlatni žeton. Tri žetona izvlače se jedan za drugim bez vraćanja. U vezi s datim događajima, odgovori:
   a) Događaj A: Prvi izvučeni žeton je ljubičast
   Događaj B: Drugi izvučeni žeton je ljubičast.

Događaj C: Treći izvučeni žeton je ljubičast.
– Da li ishod drugog i trećeg izbora zavisi od prvog?
– Da li su ovi događaji zavisni ili nezavisni? Objasni.

b) Događaj D: Prvi žeton je ljubičast, drugi je ljubičast, treći je zlatni.
– Da li ishod svakog narednog izbora zavisi od prethodnih?
– Objasni zašto su ovi događaji zavisni.

c) Događaj E: Nijedan od izvučenih žetona nije plav.
– Da li ovo zavisi od redoslijeda izvlačenja?

6. Viki i Jakov treba da polažu vozački ispit. Viki ima 70% šanse da položi ispit, a Jakov ima 60% šanse da položi ispit.
Nađi vjerovatnoću da:
a) oboje polože test,
b) barem jedan od njih položi test.
Uputstvo: Pretvori procente u razlomke.

7. Tina i Semir igraju pikado. Oni bacaju strelice prema istoj meti.
Odgovori na sljedeća pitanja u vezi s događajima A i B:
A: Tina pogodi centar.
B: Semir pogodi centar
a) Da li su događaji A i B nezavisni ili zavisni? Objasni zašto.
b) Da li su događaji „Tina promašuje" i „Semir promašuje" nezavisni ili zavisni? Objasni.
c) Vjerovatnoća da će Tina pogoditi centar pri igranju pikada jeste $\frac{1}{3}$, a vjerovatnoća da će Semir pogoditi centar jeste $\frac{2}{5}$. Ako oboje istovremeno gađaju metu, nađi vjerovatnoću da:
i) oboje pogode centar,
ii) oboje promaše centar,
iii) Tina pogodi centar, a Semir promaši.

8. U jednom odjeljenju učenici treba da izaberu jedan projekat za školsku manifestaciju.
Biralo se između 3 mogućnosti:

vrsta projekta	broj učenika koji su izabrali
sportski projekat	8
umjetnički projekat	6
naučni projekat	6

Svaki učenik bira samo jedan projekat (ne može dva istovremeno).
a) Koliko učenika ima u odjeljenju?
b) Da li se događaji „učenik je izabrao sportski projekat" i „učenik je izabrao umjetnički projekat" međusobno isključuju? Objasni.
c) Kolika je vjerovatnoća da je slučajno izabrani učenik izabrao:
i) sportski projekat, ii) umjetnički projekat, iii) naučni projekat.
č) Kolika je vjerovatnoća da učenik **nije** izabrao naučni projekat?

9. Projektni zadatak

U periodu od 7 dana izradi mali projekat u kojem ćeš analizirati vremensku prognozu i izračunati vjerovatnoće za različite događaje. Na kraju treba da pripremiš izvještaj prema fazama realizacije projekta:

1) Istraži na internetu i u izvještaju projekta ukratko objasni kako meteorolozi koriste vjerovatnoću pri profesionalnom prognoziranju vremena (računarski modeli, više scenarija, procenti vjerovatnoće).
2) Prikupi podatke za 5–7 uzastopnih dana za koje ćeš preuzeti vremensku prognozu (vjerovatnoća kiše, vjetra, temperature, opis vremena). Podatke zapiši u tabelu.
3) zračunaj vjerovatnoću za svaki od događaja:
   – da bude sunčan dan,
   – da puše vjetar,
   – da bude kiše i vjetra,
   – da bude dan pogodan za šetnju.
4) Za svaki od dana u tvojoj prognozi izračunaj vjerovatnoću za događaj:
   A: Nosit ću kišobran (ako postoji mogućnost za kišu).
   Definiši suprotan događaj B događaju A i izračunaj njegovu vjerovatnoću.
   Provjeri da li važi $P(A) + P(B) = 1$?
5) Za temperature odabranih dana izračunaj: prosjek, medijanu, mod, raspon i predstavi ih odgovarajućim dijagramom.
6) Izvedi kratak zaključak na osnovu sljedećih pitanja:
   - Kako profesionalci izračunavaju vjerovatnoće za vremenske prilike?
   - Koliko su tačne prognoze? Zašto ponekad griješe?
   - Kako izračunate vjerovatnoće utiču na svakodnevne odluke (izbor odjeće, putovanje, organizacija aktivnosti)?
   - Kako bi se dobila poboljšana prognoza (s više modela, stvarnim mjerenjima ili dužom vremenskom serijom podataka)?

Istraživanje

U školi se organizuje mala igra: baca se kockica za igru, a zatim se izvlači kuglica iz vrećice u kojoj se nalaze: 2 plave, 2 zelene i 1 crvena kuglica.

a) Objasni zašto su nezavisni događaji:

A: dobiti paran broj na kockici, i B: izvući plavu kuglicu iz vrećice.

b) Objasni zašto su nezavisni događaji:

C: dobiti broj veći od 4 na kockici, i D: izvući crvenu kuglicu.

Učenici izvlače 2 kuglice jednu za drugom, bez vraćanja.

c) Objasni zašto su zavisni događaji:

E: Prva izvučena kuglica je zelena, i F: Druga izvučena kuglica je zelena.

č) Ako se prvo izvuče crvena kuglica, razmisli o događaju:

G: Druga izvučena kuglica je plava.

Zašto ishod drugog izvlačenja zavisi od prvog?

Praktični dio – Eksperiment:
Napravi eksperiment s 20 pokušaja: bacaj kockicu i izvlači kuglice prema pravilima. Zapiši ishode u tabelu. Da li su zabilježeni rezultati slični prethodnim zaključcima o nezavisnim i zavisnim događajima?

Pitanja za razmišljanje:

1) Kada je lakše razmišljati o događajima – kada su oni nezavisni ili zavisni događaji?
2) Ako se broj kuglica u vrećici promijeni (na primjer, 10 kuglica), kako će to uticati na situaciju?

ZADACI ZA PONAVLJANJE I UTVRĐIVANJE

1. Odredi da li je odgovarajuće koristiti popis ili uzorak iz populacije prilikom istraživanja:
   a) kvaliteta proizvodnje u fabrici elektronskih uređaja,
   b) broja cipela dječije populacije u državi,
   c) broja cipela kod djece iz jednog odjeljenja,
   č) cijena proizvoda u sendvičari.
2. U školi koja ima 900 učenika slučajno je izabrano 50 učenika koji treba da odgovore na pitanja u vezi sa školskim užinama. Odredi broj jedinica u populaciji i u uzorku. Da li je ovako izabrani uzorak reprezentativan za populaciju?
3. Anketna agencija angažovana je da istraži namjere glasanja stanovnika određenog regiona za predstojeće izbore. Na osnovu prikupljenih podataka treba predvidjeti izborni rezultat u tom regionu. Objasni zašto se u svakoj od sljedećih situacija dobija neodgovarajući uzorak:
   a) anketira se slučajan izbor ljudi u lokalnom velikom trgovačkom centru između 13:00 i 15:00 sati radnim danom,
   b) anketiraju se svi članovi lokalnog šahovskog kluba,
   c) slučajan uzorak ljudi na lokalnoj željezničkoj stanici anketira se između 7:00 i 9:00 sati,
   č) provodi se anketa od vrata do vrata, pri čemu se anketira svaki glasač u jednoj određenoj ulici.
4. Odredi da li će prikupljeni podaci biti diskretni u sljedećim istraživanjima:
   a) površina svakog parka u gradu,
   b) bračni status ljudi u naselju,
   c) broj šibica u kutiji,
   č) osvojeni poeni na državnom prvenstvu u odbojci,
   ć) masa prasadi na farmama u našoj zemlji.

   Objasni da li je bolje koristiti primarne ili sekundarne podatke pri svakom od navedenih istraživanja.

5. Dimitar je sastavio instrument za prikupljanje podataka kako bi istražio koliko često ljudi idu u pozorište.
On izgleda ovako:

Dao je upitnik da popuni nekoliko ljudi koje je sreo dok su prolazili ispred pozorišta.

Zapiši nekoliko nepravilnosti u Dimitrovom istraživanju i predloži novi, poboljšani način za prikupljanje podataka.

UPITNIK

Odlasci u pozorište (s namjernim nepravilnostima)

Ova anketa ima za cilj da ispita koliko često ljudi idu u pozorište.

1. Koliko često idete u pozorište?
   a) nikada
   b) veoma rijetko (1–10 puta godišnje)
   c) ponekad (više od 2 puta godišnje)
   č) uvijek
2. Koju vrstu predstava najčešće gledate?
   a) komedije b) drame
   c) ne gledam predstave
3. Zašto idete u pozorište?
   a) zbog zabave b) zbog obrazovanja
   c) zajedno s prijateljima č) ne znam
4. Kada ste posljednji put bili u pozorištu?
   a) prije godinu dana b) prije 5 godina
   c) prije nekoliko mjeseci č) nikada

6. Menadžment bolnice želi da sazna starost pacijenata koji su hospitalizovani zbog kardiovaskularnih bolesti u mjesecu oktobru.
Prikupljeni su sljedeći podaci:

32	58	72	45	89	68	63	47	54	51
84	17	58	64	67	71	75	69	63	82
76	68	29	48	89	66	24	59	70	74
80	63	4	32	46					

a) Napravi tabelu frekvencija za grupisane podatke s klasama 0–15, 16–31, 32–47, ...
b) Pronađi modalnu klasu.
c) Pronađi klasu koja sadrži medijanu.
č) Izrazi u procentima udio pacijenata u modalnoj klasi.
ć) Da li klasa koja sadrži medijanu ili modalna klasa pruža bolju ukupnu sliku starosne strukture pacijenata? Zašto?
d) Procijeni prosječnu starost pacijenata.

7. Marketinška agencija bilježi broj telefonskih poziva svakog dana tokom perioda od 30 dana.

18	32	25	37	24	28	35	42	31	16
28	38	30	41	27	31	46	17	35	26
32	14	44	37	48	23	19	33	15	36

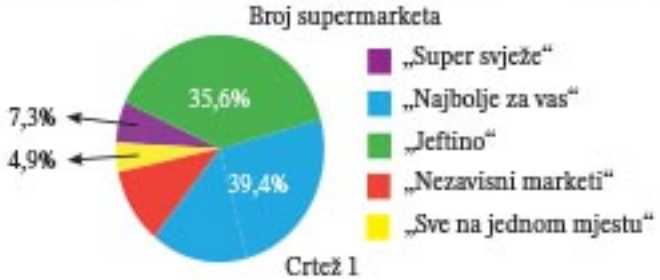
Prikaži podatke pomoću tabele frekvencija za grupisane podatke u 4 grupe.
Pronađi modalnu klasu. Koliki je procenat dana kada je agencija primila najmanje 30 poziva?

8. Četrdeset fudbalera na trening-kampu upitano je na kojoj poziciji igraju. Rezultati su dati ispod, gdje N označava napadača, S je igrač na sredini, O je odbrambeni igrač, a G je golman:

N	O	S	S	N	S	O	N	G	S
S	O	N	O	S	O	N	S	O	G
N	G	S	O	N	O	S	O	N	S
O	G	S	N	S	O	G	S	S	N

a) Predstavi podatke u tabeli frekvencija. Da li su podaci u tabeli grupisani i zašto?
b) Koja je karakteristika, a koja populacija u istraživanju?
c) Pronađi mod podataka. Objasni šta predstavlja.
č) Koliki procenat igrača su bili odbrambeni igrači ili golmani?
ć) Prikaži podatke sektorskim dijagramom.

9. Iskoristi sektorski dijagram na crtežu 1 da bi odgovorio/la na pitanja vezana za prisustvo lanaca supermarketa u zemlji.
a) Koji lanac supermarketa ima najviše prodavnica?
b) Ako je broj supermarketa 12 582, pronađi koliko ih je:
1) Jeftino, 2) Sve na jednom mjestu, 3) Nezavisni.



Crtež 1

10. Od 60 putnika u autobusu, 12 ih je bilo predškolskog uzrasta, 11 su bili studenti, 22 odraslih i 15 penzionera. U vozu je bilo 90 putnika: 23 predškolskog uzrasta, 12 studenata, 40 odraslih i 15 penzionera. Nacrtaj sektorski dijagram za svako prevozno sredstvo i uporedi starosne strukture putnika. Odgovori na sljedeća pitanja:

a) Koliko putnika u autobusu su odrasli ili penzioneri?
b) Koliki procenat putnika u vozu su djeca ili studenti?
c) U vozu i autobusu je jednak broj penzionera. Zašto su na sektorskom dijagramu uglovi koji odgovaraju ova dva sektora različiti?

11. Tehnolog nadgleda proces proizvodnje jestivog ulja u fabrici (crtež 2). Linijski dijagram prikazuje zapreminu ulja sakupljenog u odgovarajućem kontejneru tokom jednog dana.



Crtež 2

Tri puta tokom dana iz kontejnera je uzeto ulje radi ispitivanja kvaliteta.

a) Koliko je ulja proizvedeno u 7 sati?

b) Koliko se ulja uzima svaki put radi kontrole kvaliteta?

c) Kolika je ukupna količina ulja proizvedena tokom dana?

12. Za uzorak učenika osmog razreda prikazane su njihove tjelesne mase pomoću dijagrama stablo–list.

3	2 4 8
4	0 4 4 7 9 9 9
5	0 0 1 2 2 3 3 5 6 8 8
6	0 1 2 4 4 5 7 9
7	0 2 6
8	4
9	1

Ključ: 9|1 predstavlja 91 kg

Nađi: a) najveću masu, b) najmanju masu,

c) medijanu, č) raspon masa,

ć) broj učenika koji imaju masu od najmanje 70 kg,

d) procenat učenika koji imaju masu manju od 48 kg.

13. Za podatke prikazane dijagramom stablo–list odredi mod, medijanu i raspon.

3	8 9
4	2 2 5
5	0 1 1 7 9
6	1 3 4
7	0

Ključ: 3|8 predstavlja 3,8

14. Broj odsutnih učenika u jednoj školi bilježen je tokom 40 dana u zimskom periodu:

21	16	23	24	18	29	35	37	41	38
25	23	17	26	34	33	10	27	49	52
24	20	25	23	19	22	12	16	17	15
33	43	14	28	41	14	29	31	32	34

a) Napravi dijagram podataka u obliku stabla i lista.

b) Pronađi najveći i najmanji broj izostanaka za zimski period.

c) Koliki je procenat dana kada je najmanje 40 učenika bilo odsutno?

č) Prisustvo se naziva „dobrim“ ako je manje od 25 učenika odsutno tokom zimskog perioda. Koliki je procenat kada je prisustvo učenika bilo dobro?

15. Pretpostavimo da događaj A, da će sutra padati kiša, ima vjerovatnoću $P(A) = 0{,}03$.

a) Odredi suprotan događaj B od događaja A. b) Pronađi $P(B)$.

16. Zapiši elementarne događaje kod eksperimenta:

a) slučajan izbor mjeseca u godini,
b) okretanje vrteške na kojoj su označena tri polja sa slovima A, B i C,
c) izbor dvocifrenog broja manjeg od 20,
č) izbor parnog broja iz skupa sadržalaca broja 3 manjih od 30,
ć) izbor vrste peciva u pekari u kojoj se prodaju kifle sa susamom, burek i pereca.

17. Maja i Kaja biraju kompletan meni u restoranu. Meni sadrži po izboru: 3 vrste kuhanih jela, 4 vrste pića i 2 vrste deserta. Zapiši sve mogućnosti izbora koje imaju Maja i Kaja.

18. Date su dvije vrtuljke kao na crtežu 3. Ilir i Ivan igraju igru tako što ih okreću istovremeno i zapisuju na koje slovo je pala strelica. Poslije 10 okretanja pokušavaju da sastave riječ od dobijenih slova. Koji su elementarni događaji koji se mogu pojaviti pri jednom okretanju obje vrtuljke istovremeno?



Crtež 3

19. Erblina je grupisala brojeve od 2 do 10 u dvije grupe: proste i složene brojeve. Ona bira jedan broj iz svake grupe slučajnim izborom. Odredi sve elementarne događaje u Erblininom eksperimentu i pronađi vjerovatnoću da će ona izabrati:

a) 3 i 8, b) dva neparna broja,
c) dva broja čiji je zbir 13, č) uzastopne brojeve.

20. Na crtežu 4 dat je komplet kugli za bilijar. Ako se kugla bira slučajnim izborom, koja je vjerovatnoća da je:

a) izabrana bijela kugla, b) izabrana zelena kugla, c) izabran broj manji od 8?



Crtež 4

21. U gradskom kinu prodato je 20 karata za odrasle, 16 karata s popustom i 9 karata za djecu. Iz publike je slučajnim izborom izabrana jedna osoba. Pronađi vjerovatnoću da:

a) ona ima kartu s popustom, b) kartu za odrasle, c) kartu koja nije za djecu.

22. Na crtežu 5 data je dječija slagalica. Slučajnim izborom uzima se jedan dio. Pronađi vjerovatnoću da je izabran:

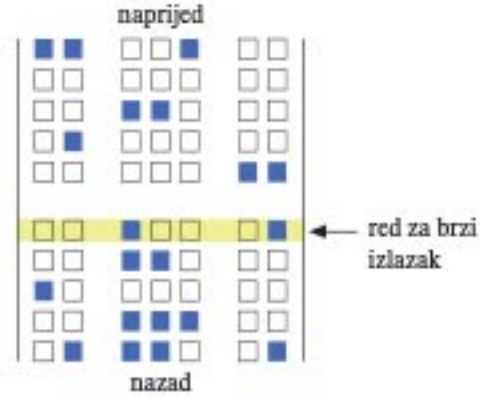
a) dio iz nekog od uglova slagalice (s dvije prave strane),
b) dio s jednom pravom stranom,
c) dio koji ima najmanje jednu pravu stranu,
č) dio koji nema prave strane.



Crtež 5

23. Na crtežu 6 dat je raspored i slobodna mjesta u avionu kojim putuješ. Zauzeta sjedišta obojena su plavom bojom. Ako slučajnim izborom zauzmeš neko od slobodnih mjesta, koja je vjerovatnoća da:

a) ćeš sjediti u prednjem redu,
b) ćeš sjediti u redu za brzi izlazak,
c) ćeš sjediti do prozora,
č) ćeš sjediti pored prolaza.



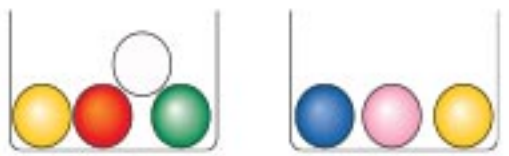
Crtež 6

24. Kugla se vadi iz torbe A i stavlja u torbu B, a zatim se iz torbe B izvlači kugla slučajnim izborom (crtež 7). Neka je:
A: prva izvučena kugla iz torbe A je crvena, i
B: druga izvučena kugla iz torbe B je crvena.
a) Da li ishod drugog izbora iz torbe B zavisi od toga koja je kugla prvo izvađena iz torbe A?
b) Da li su ovi događaji zavisni ili nezavisni?



Crtež 7

25. Pretpostavi da se slučajnim izborom izvlači kugla iz kutija na crtežu 8. Neka je:
A: izvučena je crvena kugla iz kutije X, i
B: izvučena je plava kugla iz kutije Y.
a) Da li su događaji A i B zavisni ili nezavisni? Objasni zašto.
b) Kolika je vjerovatnoća da se izvuče zelena kugla iz kutije X?
c) Kolika je vjerovatnoća da se izvuče žuta kugla iz kutije Y?
č) Ako se iz kutije X izvuče bijela kugla ne vrati se nazad, kolika je vjerovatnoća da se izvuče svaka druga kugla iz kutije X?



Crtež 8 i

26. Pri eksperimentu bacanja navrtke 400 puta, ona je pala 84 puta uspravno, a ostalih puta na stranu (crtež 9).
a) Pronađi eksperimentalnu vjerovatnoću da navrtka, kada se baci, padne na stranu.
b) Procijeni vjerovatnoću da, kada se bace dvije navrtke, one padnu:
1) obje uspravno,
2) obje na stranu.



Crtež 9

27. Jedan vrtuljak ima 6 jednakih polja: 3 crvena, 2 plava i 1 žuto. Drugi vrtuljak ima 7 jednakih polja: 4 ljubičasta i 3 zelena. Obje vrtuljke okreću se istovremeno. Pronađi vjerovatnoću da će se pri okretanju dobiti:

a) crveno i zeleno polje,
b) plavo i ljubičasto polje,
c) žuto i zeleno polje,
č) crveno i ljubičasto polje.

KORIŠTENA LITERATURA

1. Baron, Lorraine, et al. Math 8: Make Sense. Pearson, 2008.
2. Haese, Michael, et al. Grade 8 Mathematics for the International Student. 2016.
3. Pimentel, Ric, and Terry Wall. Mathematics. Hodder Education, 2013.
4. Rayner, David, Ian Bettison, Mathew Taylor. Complete Mathematics. Edited by Deborah Barton, Oxford University Press, 2023.
5. Целакоски, Наум. Дидактика на математиката. Нумерус, 1993.
6. Бакева, Верица. Веројатност. УКИМ–ФИНКИ, 2016.